Università degli Studi di Bologna
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Dipartimento di Matematica

Dottorato di Ricerca in Matematica
VIII ciclo

(Co)omologia delle Dialgebre

Tesi di Dottorato
di
Alessandra Frabetti

Cotutore all'Estero:
Prof. **J.-L. Loday**
I.R.M.A. - Strasbourg

Tutore e Coordinatore:
Prof. **P. Salmon**

Febbraio 1997

Parole Chiave:
Omologia di Hochschild e di Leibniz
Dialgebre
Alberi Binari Planari e Permutazioni
Moduli Pseudo-Simpliciali

Frabetti Alessandra
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna,
Piazza di Porta San Donato, 5
40127 Bologna, Italy

tel: 051 / 35 44 97
fax: 051 / 35 44 90
e-mail: frabetti@dm.unibo.it

Introduzione

È noto che a partire da un'algebra associativa si può definire un'algebra di Lie ponendo $[a, b] := ab - ba$. Questa corrispondenza è funtoriale, e definisce una trasformazione canonica dalla categoria delle algebre associative a quella delle algebre di Lie. L'importanza di questa trasformazione è sottolineata dai teoremi che calcolano l'omologia dell'algebra di Lie delle matrici. Il teorema di Loday, Quillen e Tsygan afferma che per ogni algebra associativa unitaria A esiste un isomorfismo di algebre di Hopf graduate [L-Q], [T]

$$H_*^{Lie}(\mathfrak{gl}(A)) \cong \bigwedge(HC_{*-1}(A)),$$

dove $\mathfrak{gl}(A)$ è l'algebra di Lie delle matrici a coefficienti in A. Allo stesso modo, se A possiede una involuzione, Loday e Procesi hanno dimostrato che la parte primitiva dell'omologia di Lie delle matrici ortogonali o simplettiche a coefficienti in A è data dall'omologia diedrale $HD_{*-1}(A)$ [L-Pr].

Nel 1989, J.-L. Loday ha scoperto una versione non commutativa dell'omologia di Lie. L'osservazione chiave è che il differenziale di Chevalley-Eilenberg sulle potenze esterne $\bigwedge^n \mathfrak{g}$ di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ può essere sollevato alle potenze tensoriali $\mathfrak{g}^{\otimes n}$, dando origine cosìad un nuovo complesso. L'omologia di questo complesso si chiama omologia di Leibniz, e viene indicata con HL_*. In effetti, questo complesso ha senso su una classe piú ampia di algebre: le *algebre di Leibniz*. Il loro commutatore soddisfa la relazione di Leibniz

$$(L) \qquad [x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

ma non è necessariamente antisimmetrico. Le algebre di Leibniz con commutatore antisimmetrico sono di fatto algebre di Lie.

Nel 1994, J.-L. Loday ha poi scoperto una versione 'associativa' delle algebre di Leibniz, che ha chiamato *dialgebre* [L5]. Per definizione, una dialgebra D è munita di due operazioni, chiamate prodotto sinistro e destro e indicate rispettivamente coi simboli $\dashv$ e $\vdash$, che soddisfano i cinque assiomi

$$(D) \quad \begin{cases} a \dashv (b \dashv c) = (a \dashv b) \dashv c = a \dashv (b \vdash c) \\ (a \vdash b) \dashv c = a \vdash (b \dashv c) \\ (a \dashv b) \vdash c = a \vdash (b \vdash c) = (a \vdash b) \vdash c, \end{cases}$$

Queste identità sono variazioni della legge associativa, e mostrano chiaramente che le dialgebre per cui i prodotti sinistro e destro coincidono sono algebre associative. È facile, poi, verificare che ponendo

$$[a, b] := a \dashv b - b \vdash a$$

si definisce un commutatore di Leibniz su D, che non è antisimmetrico, in generale, a meno che i prodotti sinistro e destro non coincidano. Dunque l'introduzione delle dialgebre porta ad un diagramma commutativo di categorie e funtori

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Dig}_k & \xrightarrow{-} & \mathbf{Leib}_k \\ \cup & & \cup \\ \mathbf{Alg}_k & \xrightarrow{-} & \mathbf{Lie}_k. \end{array}$$

La questione principale, su cui si sviluppa la presente tesi, consiste nel generalizzare il teorema di Loday-Quillen-Tsygan al contesto non commutativo. Il calcolo dell'omologia di Leibniz delle matrici $HL_*(\mathfrak{gl}(D))$, a coefficienti in una dialgebra D, ci ha portato ad introdurre l'*omologia simmetrica*, indicata con HHS_*, e a dimostrare uno dei nostri teoremi principali:

$$HL_*(\mathfrak{gl}(D)) \cong T(HHS_{*-1}(D)).$$

Si dimostra che l'omologia simmetrica di un'algebra associativa unitaria A è isomorfa alla sua omologia di Hochschild, e quindi, come caso particolare, ritroviamo il teorema già dimostrato da Cuvier e Loday [C], [Lo],

$$HL_*(\mathfrak{gl}(A)) \cong T(HH_{*-1}(A)).$$

Nel contesto non commutativo, l'omologia simmetrica delle dialgebre ricopre il ruolo dell'omologia ciclica per le algebre associative. Dato che l'omologia ciclica è strettamente correlata all'omologia di Hochschild, per mezzo della lunga sequenza esatta di A. Connes

$$\cdots \longrightarrow HH_n(A) \longrightarrow HC_n(A) \longrightarrow HC_{n-2}(A) \longrightarrow \cdots,$$

è naturale cercare la relazione fra l'omologia simmetrica delle dialgebre e la loro omologia 'naturale'.

In [L5], Loday ha introdotto l'omologia a coefficienti costanti per le dialgebre, dimostrando che è l'omologia naturale prevista dalla teoria delle operad algebriche secondo Ginzburg e Kapranov [G-K]. L'ha indicata con HY_*, dal momento che il modulo delle n-catene utilizza l'insieme Y_n degli *alberi binari planari*. È evidente la necessità di introdurre una consistente teoria di omologia a coefficienti non costanti per le dialgebre. Il procedimento è classico. Il primo passo consiste nell'estendere il complesso 'bar' di catene trovato da Loday ad un complesso di cocatene definito in modo che il secondo gruppo di coomologia classifichi le estensioni abeliane delle dialgebre,

$$HY^2(D, M) \cong \mathrm{Ext}(D, M),$$

dove M è un bimodulo qualsiasi sulla dialgebra D. Poi, per dualità, si definisce il complesso di catene di una dialgebra e la relativa omologia $HY_*(D, N)$ a coefficienti nel bimodulo non banale N. La sostanziale differenza con l'analogo procedimento per le algebre associative è che per le dialgebre le categorie di 'buoni' moduli di coefficienti per le teorie di coomologia e omologia *non* sono equivalenti (per le algebre, entrambe queste categorie coincidono con quella dei bimoduli). Vengono definite nei capitoli 3, 6 e chiamate rispettivamente *rappresentazioni* e *corappresentazioni*. Nel capitolo 5 introduciamo il più importante ingrediente della procedura di dualizzazione: l'*algebra inviluppo universale* $E(D)$ di una dialgebra D. Questo anello ci permette, per costruzione, di descrivere rappresentazioni e corappresentazioni di D in termini di moduli sinistri e destri su $E(D)$, e di introdurre il complesso di catene $EY_*(D)$ che gioca il ruolo di intermediario fra i complessi di omologia e coomologia,

$$HY^*(D, M) \cong \mathrm{Hom}_{E(D)}(EY_*(D), M) \quad \text{e} \quad HY_*(D, N) \cong N \otimes_{E(D)} EY_*(D).$$

Seguendo la terminologia introdotta da D. Quillen, che in [Q] trova l'analogo complesso per l'omologia delle algebre commutative, lo chiamamiamo *complesso cotangente* di D.

Come caso particolare, per $N = k$, ritroviamo il complesso bar definito da Loday, che presentiamo nel capitolo 2. Mostriamo, inoltre, che questo complesso è aciclico sulle dialgebre munite di una *bar-unità*, la migliore nozione di unità che si può dare in una dialgebra: un elemento che è unità per i prodotti sinistro e destro solo dalla parte della barra (in inglese, bar).

Il capitolo 8 è dedicato ad un studio sistematico dell'omologia delle dialgebre bar-unitarie. L'esistenza di una bar-unità permette di definire una struttura *pseudo-simpliciale* sul complesso di catene di una dialgebra. I moduli pseudo-simpliciali sono una generalizzazione dei moduli simpliciali, che indebolsce le relazioni fra gli operatori di degenerazione. Per questo tipo di moduli si possono dimostrare importanti teoremi, come il teorema di Eilenberg-Zilber sull'omologia del prodotto, che permettono di definire l'*omologia normalizzata* delle dialgebre, di dimostrare l'invarianza di Morita dell'omologia di dialgebra per le matrici, e infine l'isomorfismo fra l'omologia di dialgebra e l'omologia di Hochschild per un'algebra associativa unitaria A ed un bimodulo unitario M,

$$HY_*(A,M) \cong H_*(A,M).$$

Nel capitolo 9 mostriamo come il punto di vista classico, secondo cui l'omologia ciclica delle algebre associative è una variazione dell'omologia di Hochschild, può essere esteso al contesto delle dialgebre. Il trucco, inventato da Loday [L6], consiste nel considerare le permutazioni come *alberi con livelli*. La mappa naturale $S_n \longrightarrow Y_n$, che tralascia i livelli degli alberi, definisce una trasformazione canonica sull'omologia

$$HS_*(D) \longrightarrow HY_*(D).$$

Più precisamente, dimostriamo che questa trasformazione conserva la struttura pseudo-simpliciale dei moduli di catene, e permette di estendere all'omologia simmetrica tutti i risultati dimostrati nel capitolo 8 per l'omologia di dialgebra.

Le dialgebre non unitarie, invece, devono essere trattate con tecniche più elaborate. Per entrambe le teorie di omologia HY e HS, i moduli di catene sono somme dirette di potenze tensoriali della dialgebra. Nel capitolo 11 descriviamo alcune proprietà combinatoriche dell'insieme di alberi Y_n (e degli alberi con livelli, o permutazioni, S_n). L'orientazione delle foglie (come / o \), permette di definire un bicomplesso $k[Y_{p,q}]$ il cui complesso totale è il complesso originale di alberi (e analogamente per le permutazioni). Dunque, per ciascuna teoria, c'è una sequenza spettrale canonica che converge all'omologia. Nel capitolo 12 mostriamo come il bicomplesso di alberi orientati permetta di trovare, per *ogni* dialgebra D e ogni corappresentazione N, una sequenza spettrale

$$E^2_{pq} := H_p H_q(CY_{*,*}(D,N)) \Longrightarrow HY_{p+q+1}(D,N)$$

che converge all'omologia di dialgebra di D (e analogamente per l'omologia simmetrica di D). I moduli di catene di questi bicomplessi sono ancora somme dirette di molti termini. La differenza principale fra l'omologia HY_* e la sua variazione HS_* risiede ancora nelle proprietà combinatoriche degli insiemi di alberi binari. Nel capitolo 12 usiamo la sequenza spettrale per calcolare l'omologia di dialgebra per alcuni casi particolari di dialgebre non unitarie.

Innanzitutto, dimostriamo che l'isomorfismo fra l'omologia di dialgebra e l'omologia di Hochschild per le algebre associative si estende alla categoria delle algebre *omologicamente unitarie*. Questo tipo di algebre, introdotto da M. Wodzicki in [W] e ampiamente studiato da J. Cuntz e D. Quillen, risolve il problema dell'eccisione per l'omologia di Hochschild e ciclica.

In seguito, questa tecnica permette di dimostrare che il complesso cotangente di una dialgebra D è aciclico, e quindi è una risoluzione di $H_0(EY_*(D))$. Questo risultato è particolarmente importante poiché implica che l'omologia di dialgebra ammette l'interpretazione come funtore derivato,

$$HY_n(D,N) \cong Tor_n^{E(D)}(N, M(D)),$$

dove $M(D)$ è una rappresentazione di D che coincide con l'algebra stessa quando $D = A$ è un'algebra associativa.

Ringraziamenti

Non sarò mai abbastanza grata a Jean-Louis Loday per la disponibilità sincera e disinteressata, l'amicizia, ed il perpetuo buon umore, con cui mi ha accolto da due anni nel suo gruppo di ricerca a Strasburgo. Per la conoscenza, le idee ed i trucchi matematici che mi ha trasmesso, dedicandomi ore ed ore del suo tempo prezioso. Ma soprattutto, da puro artista della ricerca matematica, per avermi svelato la passione e la poesia che fanno del libero e fantasioso matematicare il vero senso del far matematica. Allieva, io, che non quantifica quanto ha appreso da un fantastico Maestro.

Al geniale Teimuraz Pirashvili, con il quale non son le parole che servono, dedico un'espressione silenziosa della mia viva emozione e inesprimibile gratitudine. So che lui sa.

A Muriel e Yann, che per un anno hanno sopportato i miei improvvisi assalti al loro letto in più (e al loro piccolo Jeremie che finalmente ne ha preso possesso), dedico con tanto tanto affetto un enorme peperoncino tailandese, in ricordo degli sconvolgenti spaghetti piccanti che propinavo loro al posto della Quiche Loraine.

Anche Nicola Ciccoli, vero collega di un tortuoso Dottorato bolognese, merita una dedica speciale. Per aver condiviso impulsivi entusiasmi quanto-geometrici e tre anni di Scuole Estive nel tempo del riposo, e per non avermi lasciata sola con le mie polemiche politiche nei duri momenti in cui non si crede più a nulla.

Ringrazio infine il Coordinatore del Dottorato, Paolo Salmon, il Direttore, Mirella Manaresi, ed i Prof. Angelo Vistoli ed Arturo Vaz Ferreira, per avermi sostenuto al mio rientro nell'Università italiana. Un ringraziamento particolare al Prof. Nicolas Teleman, per avermi permesso di collaborare con lui introducendomi nell'affascinante mondo della micro-geometria.

Un grande grandissimo bacio a mia mamma, che ogni due mesi mi chiede, con un entusiasmo, una stima e una simpatia senza pari, "Ma di cos'è che ti occupi *esattamente*?" Un altro a mio padre, che rubando con me spin e particelle da nascondere sotto al cuscino, dona uno stimolo magnetico ai miei sogni di tutti i tempi. E infine un milione (potessi!) di compenso a mio fratello, genio informatico, che mi ha introdotto alla essenziale semplicità del "postcript a mano", non mancando di sprecare le sue nottate a materializzare i miei ambiziosi progetti. Da lui ho scoperto l'acqua calda: stà scritto tutto nei manuali! (E poi, che solo lui riesce a farla bollire...)

Alla musica, amica intima ed eccitante, al mio violoncello ribelle, ai Bauhaus e agli scatenati amici dell'Ivan Illic'h, riconosco di avermi distratto in extremis prima che le formule mi inglobassero. È merito loro se ancora esploro il mondo non solo con la ragione.

Contents

Chapter 1

Dialgebre

Le dialgebre sono state introdotte da J.-L. Loday in [L5], come generalizzazione delle algebre associative. La loro particolarità è di dare origine a delle algebre di Leibniz, così come le algebre associative danno origine a delle algebre di Lie.

In questo capitolo diamo le definizioni basilari sulle dialgebre, illustrandone gli esempi più interessanti, fra cui quello della dialgebra libera e della dialgebra derivata di un'algebra associativa differenziale. Inoltre descriviamo dettagliatamente la costruzione funtoriale dell'algebra associativa canonica e dell'algebra di Leibniz di una dialgebra.

1.1 Definizione ed esempi.

1.1.1 - Dialgebre. Sia k un campo. Una *dialgebra su* k è un k-spazio vettoriale D con due operazioni, $\dashv, \vdash \colon D \otimes D \longrightarrow D$, chiamate rispettivamente prodotto sinistro e destro, che soddisfano i seguenti assiomi:

$$(D) \quad \begin{cases} a \dashv (b \dashv c) \overset{1}{=} (a \dashv b) \dashv c \overset{2}{=} a \dashv (b \vdash c) \\ (a \vdash b) \dashv c \overset{3}{=} a \vdash (b \dashv c) \\ (a \dashv b) \vdash c \overset{4}{=} a \vdash (b \vdash c) \overset{5}{=} (a \vdash b) \vdash c, \end{cases}$$

per ogni $a, b, c \in D$. Una *bar-unità* è un elemento $1 \in D$ che è unità per i prodotti sinistro e destro solo dalla parte della barra (in inglese, bar), cioè tale che $1 \vdash a = a = a \dashv 1$, per ogni $a \in D$. Una bar-unità, se esiste, non è necessariamente unica. L'insieme delle bar-unità si chiama *halo* di D. Una dialgebra si chiama *bar-unitaria* se è specificata una bar-unità 1, e l'applicazione k-lineare indotta $k \hookrightarrow D$, $\lambda \mapsto \lambda 1$ è un monomorfismo.

Siano D e D' due dialgbre su k. Un *morfismo di dialgebre* è un'applicazione k-lineare $f : D \longrightarrow D'$ che conserva i prodotti, cioè tale che

$$f(a \star b) = f(a) \star f(b),$$

dove $\star$ indica il prodotto $\dashv$ oppure il prodotto $\vdash$. Un morfismo di dialgebre si dice *unitario* se l'immagine di una bar-unità è una bar-unità.

Indichiamo con $\mathbf{Dig}_k$ la categoria delle dialgebre su k, e con $\mathbf{uDig}_k$ quella delle dialgebre bar-unitarie.

Notazione. Quando non c'è bisogno di distinguere fra il prodotto sinistro e quello destro di una dialgebra, indichiamo l'operazione con $\star$. Si intende che l'asserzione fatta dovrebbe essere ripetuta due volte: una per $\dashv$ e una per $\vdash$.

In una dialgebra D, ognuno dei due prodotti $\dashv$ e $\vdash$ è chiaramente associativo. Le algebre associative, infatti, sono il primo esempio di dialgebre, quelle per cui i prodotti sinistro e destro coincidono.

1.1.2 - Algebre associative come dialgebre. Sia A un'algebra associativa su un campo k. Possiamo munire A di una struttura di dialgebra, ponendo

$$a \dashv b := a \cdot b =: a \vdash b$$

per ogni $a, b \in A$. La struttura di dialgebra su A viene indicata con A_{di}.

Siano A e B due algebre associative. Ogni morfismo di algebre $f : A \longrightarrow B$ definisce un morfismo di dialgebre $f_{di} : A_{di} \longrightarrow B_{di}$ se si pone $f_{di}(a) := f(a)$. È facile vedere che anche il viceversa è vero. Quindi la categoria $\mathbf{Alg}_k$ delle algebre associative su k è una sottocategoria piena della categoria $\mathbf{Dig}_k$ delle dialgebre. Inoltre il funtore fedele $di : \mathbf{Alg}_k \hookrightarrow \mathbf{Dig}_k$ chiaramente manda algebre unitarie in dialgbre con bar-unità: $di : \mathbf{uAlg}_k \hookrightarrow \mathbf{uDig}_k$.

1.1.3 - Osservazione. Per la precisione, ci sono almeno altri due modi per munire un'algebra asociativa A di una struttura di dialgebra. Il primo consiste nel porre

$$a \dashv b := a \cdot b \quad \text{e} \quad a \vdash b := 0$$

per ogni $a, b \in A$. La struttura di dialgebra di A si indica con $A_{\dashv}$. Il secondo modo consiste, viceversa, nel porre

$$a \dashv b := 0 \quad \text{e} \quad a \vdash b := a \cdot b$$

per ogni $a, b \in A$. Stavolta la struttura di dialgebra di A si indica con $A_{\vdash}$. Il motivo per cui questi due tipi di dialgebre non sono molto interessanti è spiegato in (1.2.7).

Diamo ora due esempi non banali di dialgebra.

1.1.4 - Dialgebra derivata di un'algebra differenziale. Un esempio speciale di dialgebra si costruisce su un'algebra associativa differenziale (A, d) (d è una derivazione con quadrato nullo). Chiamiamo *prodotti derivati* le operazioni binarie su A definite da

$$a \dashv b := a \cdot d(b) \quad \text{e} \quad a \vdash b := d(a) \cdot b,$$

(con segno appropriato in caso di algebre graduate), per ogni $a, b \in A$. Le ipotesi su d implicano la relazione $d(a\ db) = da\ db = d(da\ b)$, da cui seguono immediatamente gli assiomi (D) per i prodotti $\dashv$ e $\vdash$. Quindi la terna $(A, \dashv, \vdash)$ forma una dialgebra, che chiamiamo *dialgebra derivata* di (A, d) e indichiamo con A_d.

Si consideri la categoria $\mathbf{dAlg}_k$ delle algebre associative differenziali. Un morfismo $f : (A, d) \longrightarrow (A', d')$ in questa categoria è un morfismo di algebre associative $f : A \longrightarrow A'$ che commuta con i differenziali, cioè

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad \text{e} \quad fd(a) = d'f(a),$$

per ogni $a, b \in A$. Ogni siffatto morfismo da luogo ad un morfismo di dialgebre $f_d : A_d \longrightarrow A'_{d'}$, se si pone $f_d(a) := f(a)$. Perciò abbiamo stabilito un funtore $\mathbf{dAlg}_k \longrightarrow \mathbf{Dig}_k$ dalla categoria delle algebre differenziali nella categoria delle dialgebre.

Supponiamo ora che l'algebra differenziale (A, d) sia munita di unità, 1. Allora necessariamente $d1 = 0$, se il campo k ha caratteristica diversa da 2. Quindi nella dialgebra derivata A_d abbiamo i prodotti

$$a \dashv 1 = a \cdot d1 = 0 \ , \quad 1 \dashv a = 1 \cdot da = da \ ,$$

$$a \vdash 1 = da \cdot 1 = da \ , \quad 1 \vdash a = d1 \cdot a = 0 \ ,$$

per ogni $a \in A_d$. Mostrano che l'elemento 1 non è una bar-unità nella dialgebra A_d. Una bar-unità, in A_d, è un elemento $x \in A$ tale che $dx = 1$, che non esiste necessariamente. In conclusione, il funtore $\mathbf{Alg}_k \longrightarrow \mathbf{Dig}_k$ non conserva gli oggetti unitari.

1.1.5 - Dialgebra indotta da un morfismo di bimoduli. Sia A un'algebra associativa, M un bimodulo su A e $f : M \longrightarrow A$ un morfismo di A-bimoduli. Si posson definire due prodotti, sul k-modulo M, che soddisfano le relazioni (D), e quindi inducono su M una struttura di dialgebra. Sono i seguenti:

$$m \dashv m' := m \cdot f(m') \quad \text{e} \quad m \vdash m' := f(m) \cdot m',$$

per ogni $m, m' \in M$. Viceversa, in (1.3.6) mostriamo che tutte le dialgebre si ottengono in questa maniera.

In particolare, si consideri il bimodulo $A \otimes A$ su A, con azioni sinistra e destra

$$a \cdot (b \otimes c) := ab \otimes c \quad \text{e} \quad (a \otimes b) \cdot c := a \otimes bc,$$

per ogni $a, b, c \in A$. La moltiplicazione $A \otimes A \longrightarrow A$ è un morfismo di A-bimoduli, quindi $A \otimes A$ è una dialgebra, con prodotti sinistro e destro

$$(a \otimes b) \dashv (a' \otimes b') := a \otimes ba'b' \quad \text{e} \quad (a \otimes b) \vdash (a' \otimes b') := aba' \otimes b'.$$

1.1.6 - Dialgebre opposte. Sia D una dialgebra su k, con prodotti $\dashv$ e $\vdash$. Per ogni $a, b \in D$, poniamo

$$a \dashv\!| \, b := b \vdash a \quad \text{e} \quad a \,|\!\vdash b := b \dashv a.$$

Allora $(D, \dashv\!|, |\!\vdash)$ è ancora una dialgebra, che chiamiamo *dialgebra opposta* e indichiamo con D^{op}.

1.1.7 - Prodotto tensoriale e matrici. Date due dialgebre D e D' su un campo k, il prodotto tensoriale (su k) $D \otimes D'$ è ancora una dialgebra, con prodotti per componenti

$$(a, a') \star (b, b') := (a \star a', b \star b'),$$

per $a, b \in D$, $a', b' \in D'$ e dove adottiamo la notazione $(a, b) = a \otimes b$. In particolare, il k-modulo $\mathrm{M}_r(D) \cong \mathrm{M}_r(k) \otimes D$ delle matrici $r \times r$ a coefficienti in una data dialgebra D è ancora una dialgebra, con prodotti 'righe $\times$ colonne'

$$(\alpha \star \beta)_{ij} \ := \ \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ik} \star \beta_{kj}$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathrm{M}_r(D)$.

1.2 Dialgebre libere.

1.2.1 - Dialgebra libera. Sia V uno spazio vettoriale su k. La *dialgebra libera su* V è una dialgebra $\bar{D}ias(V)$ assieme ad un'applicazione k-lineare $i : V \longrightarrow \bar{D}ias(V)$ che gode della proprietà universale seguente: per ogni dialgebra D ed ogni mappa k-lineare $f : V \longrightarrow D$ esiste un unico morfismo di dialgebre $\varphi : \bar{D}ias(V) \longrightarrow D$ tale che $f = \varphi \circ i$.

Analogamente, chiamiamo *dialgebra libera con bar-unità* la dialgebra bar-unitaria $Dias(V)$ che soddisfa la proprietà universale per dialgebre unitarie D, con unico morfismo fattorizzante $\varphi : Dias(V) \longrightarrow D$.

1.2.2 - Lemma. *Sia D una dialgebra, e sia $a_1 \star a_2 \star' \cdots \star'' a_n$ un monomio in D con parentesi e prodotti arbitrari. Allora esiste un unico elemento a_i, chiamato* centro*, tale che il monomio sia uguale a*

$$a_1 \vdash \cdots \vdash a_i \dashv \cdots \dashv a_n .$$

Dimostrazione. [Loday] Procediamo per induzione sul numero n di elementi. L'asserzione è ovvia per $n = 1$ e $n = 2$. Per $n = 3$, gli assiomi (D) dicono precisamente che ogni monomio $a_1 \star a_2 \star' a_3$, con arbitrarie parentesi e prodotti, può solo essere uguale ad uno dei tre monomi $a_1 \dashv a_2 \dashv a_3$, dove il termine centrale è a_1, $a_1 \vdash a_2 \dashv a_3$, con centro a_2, e $a_1 \vdash a_2 \vdash a_3$, con centro a_3.

Supponiamo ora che l'asserzione sia vera per tutti i monomi con al più n elementi, e consideriamo un monomio $a_1 \star a_2 \star' \cdots \star'' a_{n+1}$ con $n+1$ elementi. È sempre il prodotto sinistro o destro di due monomi con al più n termini. L'operazione che appare ci dice in quale dei due monomi sia piazzato il termine centrale: nel monomio a sinistra se il prodotto è $\dashv$, perché in questo caso nel monomio destro si posson cambiare tutte le operazioni in $\dashv$, e nel monomio destro se il prodotto è $\vdash$. Le ipotesi induttive poi garantiscono che in questo monomio più piccolo ci sia il termine centrale. □

1.2.3 - Proposizione. *Sia V un k-module, e $T(V) = k \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots$ lo spazio vettoriale graduato soggiacente l'algebra tensoriale su V. Indichiamo con $\bar{D}ias(V) = T(V) \otimes V \otimes T(V)$ il k-modulo graduato $\bar{D}ias(V) = \bigoplus_{n\geq 1} \bar{D}ias^n(V)$, con componenti omogenee*

$$\bar{D}ias^n(V) = \bigoplus_{i+j=n-1} V^{\otimes i} \otimes V \otimes V^{\otimes j},$$

per ogni $n \geq 1$.

La dialgebra libera su V è il k-modulo $\bar{D}ias(V)$ con prodotti sinistro e destro definiti sugli elementi omogenei come segue:

$$[v_{(-i)} \otimes v_0 \otimes v_{(j)}] \dashv [w_{(-k)} \otimes w_0 \otimes w_{(l)}] := v_{(-i)} \otimes v_0 \otimes (v_{(j)}, w_{(-k)}, w_0, w_{(l)}),$$

$$[v_{(-i)} \otimes v_0 \otimes v_{(j)}] \vdash [w_{(-k)} \otimes w_0 \otimes w_{(l)}] := (v_{(-i)}, v_0, v_{(j)}, w_{(-k)}) \otimes w_0 \otimes w_{(l)},$$

dove la notazione $v_{(-i)}$ significa $(v_{-i}, ..., v_{-1})$ e $v_{(j)}$ significa $(v_1, ..., v_j)$.

Dimostrazione. [Loday] È facile vedere che i prodotti dati sopra definiscono delle operazioni graduate, infatti

$$\dashv : (V^{\otimes i} \otimes V \otimes V^{\otimes j}) \otimes (V^{\otimes k} \otimes V \otimes V^{\otimes l}) \longrightarrow V^{\otimes i} \otimes V \otimes V^{\otimes j+k+1+l},$$

e analogamente per $\vdash$, quindi

$$\dashv, \vdash : \bar{D}ias^n(V) \otimes \bar{D}ias^m(V) \longrightarrow \bar{D}ias^{n+m}(V).$$

Soddisfano le relazioni (D), quindi il k-modulo $\bar{D}ias(V)$ è dotato di una struttura di dialgebra. Mostriamo che $\bar{D}ias(V)$ soddisfa la proprietà universale, con la mappa $i : V \longrightarrow \bar{D}ias(V)$ data dall'inclusione canonica $V \cong k \otimes V \otimes k \hookrightarrow T(V) \otimes V \otimes T(V)$. Sia D una dialgebra e $f : V \longrightarrow D$ un'applicazione k-lineare, allora poniamo $\varphi : \bar{D}ias(V) \longrightarrow D$, sulle componenti omogenee di $\bar{D}ias(V)$,

$$\varphi((v_{-i}, ..., v_{-1}) \otimes v_0 \otimes (v_1, ..., v_j)) := f(v_{-i}) \vdash \ldots \vdash f(v_{-1}) \vdash f(v_0) \dashv f(v_1) \dashv \cdots \dashv f(v_j).$$

Allora φ è un morfismo di dialgebre che coincide con f su V, ed è unicamente determinato da queste due proprietà. $\square$

1.2.4 - Proposizione. *Sia V un k-modulo. Indichiamo con $Dias(V) = T(V) \otimes (V \oplus k) \otimes T(V)$ il k-modulo graduato $Dias(V) = \bigoplus_{n \geq 0} D^n(V)$, con componenti omogenee*

$$Dias^n(V) = \bigoplus_{i+j=n} V^{\otimes i} \otimes k \otimes V^{\otimes j} \oplus \bigoplus_{i+j=n-1} V^{\otimes i} \otimes V \otimes V^{\otimes j},$$

per ogni $n \geq 0$. In particolare, stavolta si ha $Dias^0(V) = k$.

La dialgebra libera bar-unitaria su V è il k-modulo $Dias(V)$ con bar-unità data dall'immagine dell'unità $1 \in k$ nella composizione $k \cong k \otimes k \otimes k \hookrightarrow T(V) \otimes k \otimes T(V) \hookrightarrow Dias(V)$, e prodotti definiti sugli elementi omogenei dalla regola data in (1.2.3). (L'unica differenza è che gli elementi centrali v_0, w_0 ora possono essere la bar-unità 1.)

Dimostrazione. Rimane solo da verificare che $Dias(V)$ soddisfa la proprità universale, con la mappa $i : V \longrightarrow Dias(V)$ data dalla composizione delle due inclusioni $V \cong k \otimes V \otimes k \hookrightarrow T(V) \otimes V \otimes T(V) \hookrightarrow Dias(V) = [T(V) \otimes V \otimes T(V)] \oplus [T(V) \otimes k \otimes T(V)]$. Sia D una dialgebra con bar-unità 1 e $f : V \longrightarrow D$ un'applicazione k-lineare. Definiamo la mappa $\varphi : Dias(V) \longrightarrow D$ sulle componenti omogenee di $Dias(V)$ come

$$\varphi((v_{-i}, ..., v_{-1}) \otimes v_0 \otimes (v_1, ..., v_j)) := f(v_{-i}) \vdash \ldots \vdash f(v_{-1}) \vdash f(v_0) \dashv f(v_1) \dashv \cdots \dashv f(v_j),$$

per ogni $v_k \in V$ e

$$\varphi((v_{-i}, ..., v_{-1}) \otimes \lambda \otimes (v_1, ..., v_j)) := f(v_{-i}) \vdash \ldots \vdash f(v_{-1}) \vdash \lambda \cdot 1 \dashv f(v_1) \dashv \cdots \dashv f(v_j).$$

con $\lambda \in k$. Allora φ è un morfismo di dialgebre che conserva la bar-unità, coincide con f su V, ed è l'unica mappa con queste due proprietà. $\square$

1.2.5 - La mappa di fusione. Ricordiamo che l'algebra associativa libera sul k-modulo V è il modulo tensoriale graduato $\bar{T}(V)$ munito del prodotto associativo dato dal prodotto tensoriale stesso. La indichiamo con $\bar{A}ss(V)$. Chiamiamo 'fusione' l'applicazione $T(V) \otimes V \otimes T(V) \longrightarrow \bar{T}(V)$ che consiste nel dimenticare la posizione occupata dal V centrale. Chiaramente induce un'applicazione lineare

$$\bar{D}ias(V) \longrightarrow \bar{A}ss(V)$$

dalla dialgebra libera all'algebra associativa libera su V. È un morfismo di bimoduli su $\bar{A}ss(V)$ con le evidenti azioni di $\bar{T}(V)$ su $T(V) \otimes V \otimes T(V)$. Perciò la dialgebra libera è un caso particolare di (1.1.5), per $A = \bar{A}ss(V)$, $M = T(V) \otimes V \otimes T(V)$, e f la mappa di fusione.

Analogamente, dal momento che l'algebra associativa unitaria libera su V è l'algebra tensoriale $T(V)$, la mappa di fusione induce un'applicazione lineare

$$Dias(V) \longrightarrow Ass(V)$$

dalla dialgebra bar-unitaria libera all'algebra associativa unitaria libera su V, che è un morfismo di bimoduli su $Ass(V)$.

1.2.6 - Lemma. *Sia V un k-modulo. Allora la mappa di fusione induce due morfismi di dialgebre*

$$\bar{D}ias(V) \longrightarrow \bar{A}ss(V)_{di} \quad e \quad Dias(V) \longrightarrow Ass(V)_{di}.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione dei prodotti di dialgebra su $\bar{A}ss(V)_{di}$ e $Ass(V)_{di}$. □

1.2.7 - Osservazione. L'applicazione $\bar{D}ias(V) \longrightarrow \bar{A}ss(V)_{\dashv}$ (o $\bar{D}ias(V) \longrightarrow \bar{A}ss(V)_{\vdash}$) indotta dalla fusione *non* è un morfismo di dialgebre, poiché il prodotto

$$[v_{(-i)} \otimes v_0 \otimes v_{(j)}] \vdash [w_{(-k)} \otimes w_0 \otimes w_{(l)}] = (v_{(-i)}v_0v_{(j)}w_{(-k)}) \otimes w_0 \otimes w_{(l)} \in \bar{D}ias(V)$$

corrisponde all'elemento $v_{(-i)}v_0v_{(j)}w_{(-k)}w_0w_{(l)} \in \bar{A}ss(V)_{\dashv}$, mentre il prodotto $\vdash$ di due qualunque elementi in $\bar{A}ss(V)_{\dashv}$ è sempre zero.

1.3 Algebra canonica di una dialgebra.

1.3.1 - Ideali. Un *ideale* I in una dialgebra D è un k-sottomodulo di D chiuso per la moltiplicazione per ogni elemento di D, cioè tale che

$$I \star D \subseteq I \quad \text{e} \quad D \star I \subseteq I.$$

Il quoziente D/I è ancora una dialgebra, e il nucleo di ogni morfismo di dialgebre è un ideale. Dato un sottoinsieme S di D, indichiamo con $\langle S\rangle$ l'ideale generato by S,

$$\langle S\rangle := \{a \star s, s \star a \mid s \in S, a \in D\}.$$

1.3.2 - Dialgebre abeliane. Una dialgebra D è detta *abeliana* se ha tutti i prodotti nulli, cioè $a \dashv b = 0 = a \vdash b$ per ogni $a, b \in D$. Data una dialgebra D, chiamiamo *abelianizzazione di* D la dialgebra abeliana

$$D_{ab} := D/D^2,$$

dove $D^2 := \langle a \dashv b, a \vdash b \mid a, b \in D\rangle$ è l'ideale generato da tutti i prodotti. Quando D ha una bar-unità 1, l'ideale D^2 è generato dagli elementi a, $a \vdash 1$ e $1 \dashv a$ per ogni $a \in D$. Perciò $D^2 := \langle a, a \vdash 1, 1 \dashv a \mid a \in D\rangle \cong D$ e $D_{ab} = 0$.

1.3.3 - Esempio. Consideriamo la dialgebra libera $\bar{D}ias(V) = \bar{T}(V) \otimes V \otimes \bar{T}(V)$ su un k-modulo V. Allora l'ideale $\bar{D}ias(V)^2$, contenente tutti gli elementi di $\bar{D}ias(V)$ che sono il prodotto per ogni altro elemento, consiste nell'intera dialgebra eccetto gli elementi centrali di V. Quindi abbiamo un isomorfismo di k-moduli

$$\bar{D}ias(V)_{ab} \cong V,$$

che è ovviamente un isomorfismo di dialgebre abeliane.

1.3.4 - L'algebra associativa canonica di una dialgebra. Sia D una dialgebra su k. Sia $Z(D)$ l'ideale generato dagli elementi $a \dashv b - a \vdash b$, per ogni $a, b \in D$. Le identità 1,2 di (D) mostrano che $D \dashv Z(D) = 0$, in particolare, quindi, $Z(D) \dashv Z(D) = 0$. Analogamente, le identità 4,5 mostrano che $Z(D) \vdash D = 0$, quindi $Z(D) \vdash Z(D) = 0$. Dunque $Z(D)$ è una sotto-dialgebra abeliana di D.

Si ponga

$$D_{as} := D/Z(D).$$

Allora D_{as} è un'algebra associativa, con prodotti $a \cdot b := a \dashv b = a \vdash b$ per ogni $a, b \in D_{as}$. Poiché $Z(A_{di}) = 0$, abbiamo un isomorfismo naturale di algebre $(A_{di})_{as} \cong A$. Dunque il funtore di definito in (1.1.2) ammette un funtore aggiunto a sinistra $as : \mathbf{Dig}_k \longrightarrow \mathbf{Alg}_k$. In altre parole, data una dialgebra D, l'algebra D_{as} è universale, nel senso che ogni morfismo di dialgebre $D \longrightarrow A_{di}$, dove A è un'algebra associativa, si fattorizza attraverso un morfismo di algebre $D_{as} \longrightarrow A$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(D_{as}, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Dig}_k}(D, A_{di}).$$

Quando D ha una bar-unità 1, la classe $[1]$ è una unità in D_{as}, quindi $as : \mathbf{uDig}_k \longrightarrow \mathbf{uAlg}_k$. In questo caso, l'ideale $Z(D) = \langle a \dashv b - a \vdash b \mid a, b \in D \rangle$ è generato dagli elementi $a - a \vdash 1$, $a - 1 \dashv a$ per ogni $a \in D$. Se, inoltre, la bar-unità è unità anche dalla parte puntata di un prodotto, questo ideale è zero. Infatti, supponiamo che $a \vdash 1 = a$ per tutti gli $a \in D$, allora

$$1 \dashv a = (1 \dashv a) \vdash 1 \overset{(D4,5)}{=} (1 \vdash a) \vdash 1 = a \vdash 1 = a,$$

e analogamente $a \vdash 1 = a$ per ogni $a \in D$. Dunque $D = D_{as}$ è un'algebra associativa unitaria. (Si noti che se una dialgebra D non ha divisori dello zero, allora una bar-unità è sufficiente a garantire che D sia un'algebra associativa unitaria. Infatti per ogni $a, b \in D$ si ha

$$(a \vdash 1) \vdash b = (a \dashv 1) \vdash b = a \vdash b \implies a \vdash 1 - a = 0,$$

e analogamente $1 \dashv a - a = 0$.)

1.3.5 - Esempio. Sia V un k-modulo. Si osservi che ogni elemento $\underline{v} \dashv \underline{w} - \underline{v} \vdash \underline{w} \in \bar{D}ias(V)$ (resp. $Dias(V)$) è mandato in $\underline{vw} - \underline{vw} = 0$ dalla fusione. Quindi la mappa di fusione è identicamente zero sull'ideale $Z(D)$, quando $D = \bar{D}ias(V)$ o $D = Dias(V)$. Perciò induce due isomorfismi di algebre

$$\bar{D}ias(V)_{as} \cong \bar{A}ss(V) \quad \text{e} \quad Dias(V)_{as} \cong Ass(V).$$

Ora invertiamo il procedimemnto descritto in (1.1.5), e mostriamo che ogni dialgebra può essere vista come bimodulo M su un'algebra associativa A, dotato di un morfismo di bimoduli $f : M \longrightarrow A$.

1.3.6 - Proposizione. *Sia D una dialgebra, e D_{as} la sua algebra associativa canonica. Allora esiste una struttura di D_{as}-bimodulo su D, e un morfismo di D_{as} bimoduli $f : D \longrightarrow D_{as}$ tale che la struttura di dialgebra su D sia data da $a \dashv b = a \cdot f(b)$ e $a \vdash b = f(a) \cdot b$.*

Dimostrazione. Prima definiamo su D una struttura di bimodulo su D_{as}, ponenedo

$$D_{as} \otimes D \longrightarrow D \quad , \quad [a] \cdot b := a \vdash b,$$

$$D \otimes D_{as} \longrightarrow D \quad , \quad a \cdot [b] := a \dashv b.$$

Le identità 1, 2 e 4, 5 di (D) garantiscono che le azioni date sopra siano ben definite. Infatti, l'uguaglianza $[a \dashv b] = [a \vdash b]$ in D_{as} è coerente con le uguaglianze

$$[a \dashv b] \cdot c = (a \dashv b) \vdash c = (a \vdash b) \vdash c = [a \vdash b] \cdot c,$$

$$c \cdot [a \dashv b] = c \dashv (a \dashv b) = c \dashv (a \vdash b) = c \cdot [a \vdash b],$$

in D. Rispetto a queste azioni, la proiezione cqnonica su $D \longrightarrow D_{as}$ è chiaramente un morfismo di bimoduli. Dalla definizione, segue infine che la struttura di dialgebra su D è precisamente quella indotta dalla proiezione. □

1.4 Dialgebre e algebre di Leibniz.

1.4.1 - Algebre di Leibniz. Un'*algebra di Leibniz* è un k-modulo $\mathfrak{g}$ munito di un'operazione bianaria $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, chiamata *commutatore*, soddisfacente la relazione di Leibniz

(L) $\quad [x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$

per ogni $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Le algebre di Lie, il cui commutatore soddisfa la relazione di Jacobi

(J) $\quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0,$

e l'identità di antisimmetria

(A) $\quad [x, x] = 0,$

sono evidentemente algebre di Leibniz, poiché data (A) si ha una equivalenza fra le relazioni (J) e (L).

Una descrizione completa delle algebre di Leibniz può essere trovata in [L-P] e [L2]. Il loro ruolo nella geometria differenziale classica è stato recentemente posto in evidenza in [KS]. Ecco un esempio classico di un'algebra di Leibniz che non è antisimmetrica (quindi non è un'algebra di Lie).

1.4.2 - Algebra di Leibniz derivata di un'algebra di Lie. Sia $(\mathfrak{g}, d)$ un'algebra di Lie differenziale, con commutatore di Lie $[\ ,\ ]$. Il nuovo commutatore

$$[x, y]_d := [x, dy],$$

chiamato *commutatore derivato* di $(\mathfrak{g}, d)$, soddisfa (L) ma non è antisimmetrico, quindi definisce un'algebra di Leibniz su $\mathfrak{g}$, che indichiamo con $\mathfrak{g}_d$.

1.4.3 - L'algebra di Leibniz canonica di una dialgebra. Sia D una dialgebra su k. Possiamo munire D di un commutatore di Leibniz, ponendo

$$[a, b] := a \dashv b - b \vdash a,$$

per ogni $a, b \in D$. Indichiamo con D_L l'algebra di Leibniz così definita. Un morfismo di dialgebre $f : D \longrightarrow D'$ dà luogo ad un morfismo di algebre di Leibniz $f_L : D_L \longrightarrow D'_L$, se si pone $f_L(a) := f(a)$. Dunque l'assegnamento $D \mapsto D_L$ definisce un funtore $\mathbf{Dig}_k \overset{-}{\longrightarrow} \mathbf{Leib}_k$ dalla categoria delle dialgebre su k alla categoria delle algebre di Leibniz su k.

1.4.4 - Proposizione. *Esiste un digramma commutativo di categorie e funtori*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Alg}_k & \xrightarrow{-} & \mathbf{Lie}_k \\ di\downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Dig}_k & \xrightarrow{-} & \mathbf{Leib}_k \ . \end{array}$$

Dimostrazione. Quando A è un'algebra associativa, il commutatore di Leibniz definito sopra su A_{di} è antisimmetrico, quindi l'algebra di Leibniz $(A_{di})_L$ è un'algebra di Lie. □

In particolare, se A_d è la dialgebra derivata di un'algebra associativa differenziale (A, d), come in (1.1.4), e $\mathfrak{g} = A_L$ è la sua algebra di Lie, allora $(\mathfrak{g}, d)$ è un'algebra di Lie differenziale come in (1.4.2), e la sua algebra di Leibniz derivata $\mathfrak{g}_d$ coincide con l'algebra di Leibniz di A_d, cioè $(A_d)_L \cong (A_L)_d$.

1.4.5 - Algebra di Leibniz libera e dialgebra libera. Dato un k-modulo V, l'algebra associativa libera $\bar{T}(V)$ definisce un'algebra di Lie $\bar{T}(V)_L$ con commutatore $[\underline{w}, \underline{v}] = \underline{w} \otimes \underline{v} - \underline{v} \otimes \underline{w}$. L'algebra di Lie libera su V è allora isomorfa all'immagine dell'endomorfismo di $\underline{T}(V)$ dato induttivamente da $\gamma(v) = v$ per $v \in V$, e $\gamma(\underline{w} \otimes v) = \underline{w} \otimes v - v \otimes \underline{w}$.

L'*algebra di Leibniz libera* su un k-modulo V, indicata con $Leib(V)$, è il modulo tensoriale graduato $\bar{T}(V)$ con l'unico commutatore di Leibniz definito induttivamente da

$$[\underline{w}, v] := \underline{w} \otimes v \quad , \quad w \in V^{\otimes n}, v \in V.$$

(Vedere [L-P] per ulteriori informazioni.) Dunque l'applicazione $\gamma : \bar{T}(V) \longrightarrow Lie(V)$ induce un morfismo di algebre di Leibniz $\gamma : Leib(V) \longrightarrow Lie(V)$.

Ora si consideri la dialgebra libera su V, $\bar{D}ias(V)$. Genera un'algebra di Leibniz $\bar{D}ias(V)_L$ con commutatore

$$[v_{(-i)} \otimes v_0 \otimes v_{(j)}, w_{(-k)} \otimes w_0 \otimes w_{(l)}] := v_{(-i)} \otimes v_0 \otimes (v_{(j)}, w_{(-k)}, w_0, w_{(l)}) - w_{(-k)} \otimes w_0 \otimes (w_{(l)}, v_{(-i)}, v_0, v_{(j)}),$$

con le notazioni di (1.2.3).

Chiamiamo $\gamma_1 : \bar{T}(V) \longrightarrow \bar{T}(V) \hookrightarrow T(V) \otimes V \otimes T(V)$ la composizione della mappa γ con l'immersione che pone il termine v_1 con indice 1, di ogni monomio di $\bar{T}(V)$, sempre nella posizione centrale. Per esempio, $\gamma_1(v_1, v_2) = v_1 \dashv v_2 - v_2 \vdash v_1$. Allora $\gamma_1 : Leib(V) \longrightarrow \bar{D}ias(V)$ è una mappa lineare che induce un morfismo di algebre di Leibniz $Leib(V) \longrightarrow \bar{D}ias(V)_L$. Quindi l'algebra di Leibniz libera su V è isomorfa alla sottoalgebra di $\bar{D}ias(V)_L$ data dall'immagine di γ_1.

1.4.6 - Proposizione. *Dato un k-modulo V, le mappe definite sopra inducono un diagramma commutativo di algebre di Leibniz*

$$\begin{array}{ccc} Leib(V) & \overset{\gamma_1}{\hookrightarrow} & \bar{D}ias(V)_L \\ \gamma\downarrow & & \downarrow \mathit{fusione} \\ Lie(V) & \overset{\gamma}{\hookrightarrow} & Ass(V)_L \ . \end{array}$$

Dimostrazione. Segue immediatamente da (1.4.4). □

È noto che il funtore $\mathbf{Alg}_k \xrightarrow{-} \mathbf{Lie}_k$ ha un aggiunto a sinistra: il funtore che manda un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ nella sua algebra inviluppo universale $U\mathfrak{g} := T(\mathfrak{g})/\langle [x,y] - x \otimes y + y \otimes x\rangle$.

1.4.7 - Dialgebra inviluppo universale. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Leibniz. Consideriamo la dialgebra libera sul k-modulo $\mathfrak{g}$, $\bar{D}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \otimes T(\mathfrak{g})$, e definiamo la *dialgebra inviluppo universale* di $\mathfrak{g}$ come il quoziente

$$\bar{U}d(\mathfrak{g}) := \bar{D}(\mathfrak{g})/\langle [x,y] - x \dashv y + y \vdash x\rangle.$$

Analogamente, consideriamo la dialgebra libera bar-unitaria sul k-modulo $\mathfrak{g}$, $D(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g}) \otimes (\mathfrak{g} \oplus k) \otimes T(\mathfrak{g})$, e definiamo la *dialgebra inviluppo universale bar-unitaria* di $\mathfrak{g}$ come il quoziente

$$Ud(\mathfrak{g}) := D(\mathfrak{g})/\langle [x,y] - x \dashv y + y \vdash x\rangle.$$

1.4.8 - Osservazione. Si noti che, per un'algebra di Lie, si suppone sempre che l'algebra inviluppo universale $U\mathfrak{g}$ sia unitaria. Di più, per costruzione, l'algebra inviluppo è munita di una proiezione $U\mathfrak{g} \longrightarrow k$ sulla componente di grado 0, che induce un'*aumentazione* di $U\mathfrak{g}$ sul campo k. Il nucleo di questa aumentazione, $U\mathfrak{g}^- := \ker(U\mathfrak{g} \longrightarrow k)$, è un'algebra non unitaria tale che $U\mathfrak{g} \cong U\mathfrak{g}^- \oplus k$. Non è banale osservare che $U\mathfrak{g}^-$ sia proprio l'algebra inviluppo non unitaria di $\mathfrak{g}$, cioè che $U\mathfrak{g}^- \cong \bar{U}\mathfrak{g}$.

Per le algebre di Leibniz questo isomorfismo non vale. Più precisamente, la dialgebra inviluppo universale $Ud(\mathfrak{g})$ di un'algebra di Leibniz $\mathfrak{g}$ è una dialgbera aumentata, dove l'aumentazione è data dalla proiezione lineare $\varepsilon : Ud(\mathfrak{g}) \longrightarrow k$ tale che $\varepsilon(1) = 1$. Il nucleo di ε, $Ud(\mathfrak{g})^- := \ker(\varepsilon : Ud(\mathfrak{g}) \longrightarrow k)$ è una dialgebra non-unitaria tale che $Ud(\mathfrak{g}) \cong Ud(\mathfrak{g})^- \oplus k$, ma non coincide con $\bar{U}d(\mathfrak{g})$. Infatti, sollevando l'aumentazione alla dialgebra libera, $\varepsilon : Dias(\mathfrak{g}) \longrightarrow k$, si scopre che il nucleo è

$$Dias(\mathfrak{g})^- \cong \bar{D}ias(\mathfrak{g}) \oplus [\bar{T}(\mathfrak{g}) \otimes k \otimes T(\mathfrak{g}) \oplus T(\mathfrak{g}) \otimes k \otimes \bar{T}(\mathfrak{g})].$$

Dunque $\bar{U}d(\mathfrak{g})$ è solo un addendo diretto di $Ud(\mathfrak{g})^-$.

1.4.9 - Proposizione. *I funtori*

$$\bar{U}d : \mathbf{Leib}_k \longrightarrow \mathbf{Dig}_k \quad e \quad Ud : \mathbf{Leib}_k \longrightarrow \mathbf{uDig}_k$$

sono aggiunti a sinistra rispettivamente al funtore $\mathbf{Dig}_k \xrightarrow{-} \mathbf{Leib}_k : D \mapsto D_L$ *e alla sua restrizione* $\mathbf{uDig}_k \xrightarrow{-} \mathbf{Leib}_k$.

Dimostrazione. Data una dialgebra D, ogni morfismo di Leibniz $f : \mathfrak{g} \longrightarrow D_L$ può essere esteso in maniera unica ad un morfismo di dialgebre $\bar{D}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \otimes T(\mathfrak{g}) \longrightarrow D$. Poiché $f([x,y] - x \dashv y + y \vdash x) = 0$, l'applicazone f passa al quoziente e definisce univocamente un morfismo di dialgebre $\bar{U}d(\mathfrak{g}) \longrightarrow D$. Viceversa, ogni applicazione $F : \bar{U}d(\mathfrak{g}) \longrightarrow D$ può essere ristretta al k-sottomodulo $\mathfrak{g} \cong k \otimes \mathfrak{g} \otimes k \subset \bar{U}d(\mathfrak{g})$, e quando F è un morfismo di dialgebre, la composizione $F : \mathfrak{g} \longrightarrow D \longrightarrow D_L$ è un morfismo di algebre di Leibniz. Queste corrispondenze inducono un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Dig}_k}(\bar{U}d(\mathfrak{g}), D) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Leib}_k}(\mathfrak{g}, D_L).$$

Per il funtore Ud la dimostrazione è uguale: dobbiamo solo assumere che D sia una dalgebra bar-unitaria e ogni morfismo di dialgebre sia unitario. Abbiamo quindi un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{uDig}_k}(Ud(\mathfrak{g}), D) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Leib}_k}(\mathfrak{g}, D_L).$$

□

1.4.10 - Proposizione. *Sia V un k-modulo, allora ci sono degli isomorfismi canonici di dialgebre (bar-unitarie)*

$$\bar{U}d(Leib(V)) \cong \bar{D}ias(V) \quad e \quad Ud(Leib(V)) \cong Dias(V).$$

Dimostrazione. [L6] Il funtore $Leib : \mathbf{Mod}_k \longrightarrow \mathbf{Leib}_k$ è aggiunto a sinistra al funtore 'oblio' dalle algebre di Leibniz ai k-moduli. Quindi, per (1.4.9), la composizione $\bar{U}d \circ Leib : \mathbf{Mod}_k \longrightarrow \mathbf{Leib}_k \longrightarrow \mathbf{Dig}_k$ è aggiunta a sinistra alla composizione $\mathbf{Dig}_k \xrightarrow{-} \mathbf{Leib}_k \longrightarrow \mathbf{Mod}_k$, che è il funtore 'oblio' dalle dialgebre ai k-moduli e il cui funtore aggiunto a sinistra è precisamente $\bar{D}ias : \mathbf{Mod}_k \longrightarrow \mathbf{Dig}_k$.

Lo stesso argomento mostra che la composizione $Ud \circ Leib : \mathbf{Mod}_k \longrightarrow \mathbf{Leib}_k \longrightarrow \mathbf{uDig}_k$ coincide con il funtore $Dias : \mathbf{Mod}_k \longrightarrow \mathbf{Dig}_k$. □

1.5 L'operad Dias.

Molti tipi di algebre danno luogo ad un operad algebrica, che contiene le operazioni permesse sull'algebra come elementi, e le loro proprietà come relazioni. Informazioni dettagliate sulle operad quadratiche e di Koszul si trovano in [G-K]. Per un'introduzione alla teoria si può consultare [L3].

1.5.1 - L'operad Dias. Data una dialgebra D, tutte le operazioni che si possono compiere su n fissati elementi $a_1, ..., a_n \in D$, usando i prodotti dati $\dashv, \vdash$, producono, per (1.2.2), un elemento del tipo

$$a_{\sigma(1)} \vdash a_{\sigma(2)} \vdash \cdots \vdash a_{\sigma(i)} \dashv \cdots \dashv a_{\sigma(n)},$$

dove σ è una permutazione su n elementi. Ognuna di queste operazioni è allora univocamente determinata da una permutazione $\sigma \in S_n$ e da un indice $i \in \{1, ..., n\}$ tale che $a_{\sigma(i)}$ sia il termine centrale del monomio. Perciò l'operad algebrica $\mathcal{D}ias$ delle dialgebre è descritta, in dimensione $n \geq 1$, come il modulo sinistro su S_n isomorfo ad n copie della rappresentazione regolare di S_n,

$$\mathcal{D}ias(n) \cong k^n \otimes k[S_n].$$

Poiché i prodotti nelle dialgbere sono composizioni delle operazioni binarie $\dashv, \vdash$, e le relazioni (D) sono quadratiche, l'operad $\mathcal{D}ias$ è quadratica, e ammette un'operad duale $\mathcal{D}ias^!$, secondo la definizione di [G-K].

1.5.2 - Dialgebre duali. Loday ha trovato l'operad duale dell'operad delle dialgebre. In [L6], dimostra che l'operad $\mathcal{D}ias^!$, in dimensione n, è isomorfa a c_n copie della rappresentazione regolare di S_n, dove c_n, noto come numero di Catalano, è la cardinalità dell'insieme Y_n degli alberi planari binari con $n+1$ foglie ed una radice. Perciò

$$\mathcal{D}ias^!(n) \cong k[Y_n] \otimes k[S_n].$$

Questa nuova operad definisce un nuovo tipo di algebre, chiamate dialgebre duali. Una *dialgebra duale* è un k-modulo R munito di due operazioni binarie $\prec, \succ$, che soddisfano i seguenti assiomi:

$$(D!) \quad \begin{cases} (a \prec b) \prec c \overset{1}{=} a \prec (b \prec c) + a \prec (b \succ c) \\ (a \succ b) \prec c \overset{2}{=} a \succ (b \prec c) \\ a \succ (b \succ c) \overset{3}{=} (a \succ b) \succ c + (a \prec b) \succ c. \end{cases}$$

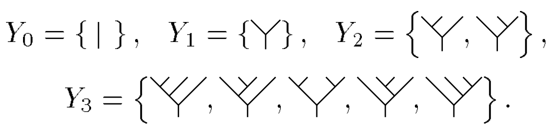
Chapter 2

Omologia bar delle dialgebre

Una tecnica standard per definire degli invarianti sulle algebre è la teoria di omologia. Per le dialgebre, i primi passi sono stati fatti da J.-L. Loday, che ha costruito l'omologia bar delle dialgebre usando solo gli assiomi (D) in bassa dimensione. L'operatore di bordo $d' : D^{\otimes n} \longrightarrow D^{\otimes n-1}$ è tale che la composizione $d' : D^{\otimes 3} \longrightarrow D^{\otimes 2} \longrightarrow D$ dà zero perché valgono le relazioni (D). È chiaro, allora, che il modulo delle catene in dimensione 3 deve essere 5 copie di $D^{\otimes 3}$, una per ogni identità (D), e che quello in dimensione 2 deve essere 2 copie di $D^{\otimes 2}$, una per ogni operazione. Estendendo questo complesso, si vede che in dimensione n si devono considerare $\frac{2n!}{n!(n+1)!}$ copie di $D^{\otimes n}$, cioè un numero di copie di $D^{\otimes n}$ uguale al numero degli alberi planari e binari con n vertici interni.

2.1 Alberi e complesso di catene.

2.1.1 - Alberi planari binari. Per ogni numero naturale n, sia Y_n l'insieme degli *alberi planari binari con una radice e* $n+1$ *foglie*, che numeriamo in ordine cresciente $0, 1, ..., n$. Dato un albero y con $n+1$ foglie, poniamo $|y| := n$. Per $n = 0$, consideriamo l'unico albero $|$ con una foglia, una radice e nessun vertice. L'insieme Y_n ha $c_n = \frac{2n!}{n!(n+1)!}$ elementi (c_n è noto come il *numero di Catalano*), così gli insiemi $Y_0, Y_1, Y_2, ...$ hanno cardinalità $1, 1, 2, 5, 14, 42$ e via di seguito. Ecco una figura degli insiemi Y_n per $n = 0, 1, 2, 3$:



Un *omeomorfismo* da un'albero y ad un altro albero y' è un'applicazione continua che manda la radice nella radice e le foglie nelle foglie mantenendole nello stesso ordine (non stretto). Chiaramente queste condizioni sono stabili per composizione.

Gli alberi si possono ottenere l'uno dall'altro ripetendo due possibili operazioni fondamentali: togliere e aggiungere foglie. L'operazione che cancella le foglie permette di definire degli operatori di faccia $Y_n \longrightarrow Y_{n-1}$ e quindi di considerare il complesso di catene associato $k[Y_*]$. L'operazione di aggiungere foglie permette invece di definire due tipi di operatori 'crescenti' $Y_n \longrightarrow Y_{n+1}$, che corrispondono alle degenerazioni e alle extra-degenerazioni sul complesso di catene degli alberi (vedi il capitolo 8).

2.1.2 - Facce sugli alberi. Per ogni $n \geq 0$, ed ogni $i = 0, ..., n$, definiamo la faccia

$$d_i : Y_n \longrightarrow Y_{n-1}$$

come l'applicazione che associa ad un n-albero y l'$(n-1)$-albero $d_i(y)$ che si ottiene *cancellando* la foglia i-esima da y. Per esempio:

2.1.3 - Lemma. *Le facce soddisfano le relazioni*

$$(d) \quad d_i d_j = d_{j-1} d_i \ , \ \textit{per ogni } i < j.$$

Quindi gli operatori di bordo $d, d' : k[Y_n] \longrightarrow k[Y_{n-1}]$ *dati da* $d = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$ *e* $d' = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i d_i$ *soddisfano* $d \circ d = 0$ *e* $d' \circ d' = 0$. *Perciò* $(k[Y_*], d)$ *e* $(k[Y_*], d')$ *sono complessi di catene.*

Dimostrazione. Infatti, visto che la foglia numero j di un albero y è la foglia numero $j-1$ dell'albero $d_i(y)$, gli operatori $d_i d_j$ e $d_{j-1} d_i$ producono la stessa modificazione: cancellano le foglie numero i e j. □

2.1.4 - Complesso bar di una dialgebra. Sia D una dialgebra sul campo k. Definiamo il *modulo di n-catene di D* come

$$CY_n(D) := k[Y_n] \otimes D^{\otimes n},$$

e un'applicazione k-lineare $d' : CY_n(D) \longrightarrow CY_{n-1}(D)$, $d' = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i d_i$, per mezzo delle facce

$$d_i(y \otimes (a_1, ..., a_n)) := d_i(y) \otimes (a_1, ..., a_i \circ_y^i a_{i+1}, ..., a_n) \quad \text{per } i = 1, ..., n-1,$$

per ogni $y \in Y_n$, $a_1, ..., a_n \in D$, dove le operazioni $\circ_i^y$, per $i = 1, ..., n-1$, sono definite da

$$\circ_i^y := \begin{cases} \dashv & \text{, se the } i\text{-esima foglia di } y \text{ è orientata come } \backslash, \\ \vdash & \text{, se the } i\text{-esima foglia di } y \text{ è orientata come } /. \end{cases}$$

Si noti che, in analogia con il complesso bar di un'algebra associativa, per l'operatore di bordo adottiamo il simbolo d', invece di d, per sottolineare che la somma delle facce è presa solo fino a $n-1$. Quindi l'operatore d' non moltiplica i termini a_n e a_1 di una n-upla $a_1, ..., a_n$.

2.1.5 - Lemma. *L'operatore di bordo definito sopra soddisfa l'identità* $d' \circ d' = 0$, *e quindi* $(CY_*(D), d')$ *è un complesso di catene.*

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che le facce $d_i : CY_n(D) \longrightarrow CY_{n-1}(D)$ appena definite soddisfano le relazioni simpliciali (d) citate sopra. Sugli alberi, queste relazioni sono mostrate in (2.1.3). Sulle n-uple $(a_1, ..., a_n)$ la dimostarzione si divide in due casi. Se $j = i+1$, le operazioni $d_i d_{i+1}$ e $d_i d_i$ producono rispettivamente i termini

$$a_i \circ_i^{d_{i+1}(y)} (a_{i+1} \circ_{i+1}^y a_{i+2}) \quad \text{e} \quad (a_i \circ_i^y a_{i+1}) \circ_i^{d_i(y)} a_{i+2}.$$

L'uguaglianza di questi due termini è equivalente agli assiomi (D) della dialgebra. Ciò deve essere verificato nelle cinque possibili mutue positioni delle foglie numero i e $i+1$, che sono illustrate dalle foglie interne dei cinque alberi di Y_3. (La dimostrazione completa, con tutti i casi dettagliati, si trova in [L6].)

Per $j > i+1$, le due operazioni $d_i d_j$ e $d_{j-1} d_i$ coincidono, poichè entrambe sostituiscono il termine $(a_1, ... a_n)$ col termine $(a_1, ..., a_i \circ_y^i a_{i+1}, ..., a_j \circ_y^j a_{j+1}, ..., a_n)$. □

2.2 Omologia bar delle dialgebre.

2.2.1 - Omologia bar delle dialgebre. Sia D una dialgebra su k. Chiamiamo *omologia bar di D* l'omologia del complesso di catene

$$HY_n(D) := H_n(CY_*(D), d')$$

per ogni $n \geq 1$.

2.2.2 - Calcoli elementari. Sia D una dialgebra. In bassa dimensione, il complesso bar di D ha bordo $d' : k[Y_2] \otimes D^{\otimes 2} \longrightarrow k[Y_1] \otimes D \cong D$ dato da

$$d'(\curlyvee \otimes (a, b)) = a \dashv b \quad \text{e} \quad d'(\curlyvee \otimes (a, b)) = a \vdash b.$$

Quindi $HY_1(D)$ è isomorfo all'abelianizzazione di D,

$$HY_1(D) \cong D/D^2 = D_{ab},$$

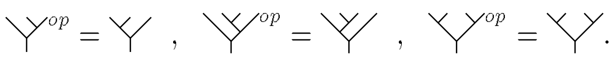
dove $D^2 = \{a \dashv b, a \vdash b \mid a, b \in D\}$. In particolare, quando D ha una bar-unità si ha $D^2 \cong D$, quindi $HY_1(D) = 0$.

Quando D è una dialgebra abeliana, si ha $D^2 = 0$, perciò $HY_1(D) = D$. Inoltre, in questo caso, l'operatore di bordo è ovviamente sempre nullo, così ogni catena del complesso bar è un ciclo e non ci sono bordi. In conclusione, l'omologia bar di una dialgebra abeliana D è

$$HY_n(D) \cong k[Y_n] \otimes D^{\otimes n}$$

per ogni $n \geq 1$.

2.2.3 - Alberi opposti. Per ogni $n \geq 0$, sia $op : Y_n \longrightarrow Y_n$ la simmetria assiale attorno alla radice degli alberi. L'immagine di un n-albero y si chiama *albero opposto di y*, e si indica con y^{op}. Per esempio



La simmetria assiale è chiaramente una biezione sugli insiemi di alberi, e $(y^{op})^{op} = y$.

Consideriamo ora una dialgebra D, e sia D^{op} la sua dialgebra opposta (1.1.6). La simmetria assiale degli alberi induce, per ogni $n \geq 0$, un isomorfismo di k-moduli $op : k[Y_n] \otimes D^{\otimes n} \longrightarrow k[Y_n] \otimes (D^{op})^{\otimes n}$, con $op(y \otimes \underline{a}) := y^{op} \otimes \underline{a}$. Si verifica immediatamente che questa mappa commuta con gli operatori di bordo definiti sui moduli di catene $CY_*(D)$ e $CY_*(D^{op})$, e quindi otteniamo un isomorfismo sull'omologia

$$HY_*(D) \cong HY_*(D^{op}).$$

2.3 Omologia nulla per le dialgebre bar-unitarie.

È noto che il complesso bar di Hochschild di un'algebra associativa dà zero in omologia, quando l'algebra ha una unità. L'unità, infatti, si usa per costruire una omotopia contraente sul complesso bar di un'algebra associativa. (Vedere, per esempio, Proposition (1.1.12) in [L1].) Lo stesso succede per le dialgebre, quando sono dotate di una bar-unità.

2.3.1 - Teorema. *Sia D una dialgebra con bar-unità. Allora il complesso bar di D è aciclico, cioè*

$$HY_n(D) = 0,$$

per ogni $n \geq 1$.

Dimostrazione. Consideriamo l'identità e l'applicazione nulla sul complesso di catene $CY_*(D)$. Se la dialgebra D ha una bar-unità, possiamo definire una omotopia fra queste due mappe, ponendo

$$h : k[Y_n] \otimes D^{\otimes n} \longrightarrow k[Y_{n+1}] \otimes D^{\otimes n+1} \ , \quad h(y \otimes \underline{a}) := s_0(y) \otimes (1, \underline{a}),$$

dove $\underline{a} = (a_1, ..., a_n)$ è un elemento generico di $D^{\otimes n}$, e $s_0(y)$ è l'$(n+1)$-albero ottenuto biforcando la foglia 0 di y, cioè rimpiazzando la foglia $|$ con il ramo $\curlyvee$. Per provare che

$$d'h + hd' = id,$$

dobbiamo solo verificare che $d_1 h = id$ e $d_i h = hd_{i-1}$ per ogni $i = 2, ..., n+1$. Infatti, per la prima uguaglianza abbiamo

$$d_1 h(y \otimes \underline{a}) = d_1 s_0(y) \otimes (1 \vdash a_1, ..., a_n) = y \otimes \underline{a},$$

poiché chiaramente $d_1 s_0$ cancella una foglia che è appena stata aggiunta, e per la seconda uguaglianza, abbiamo

$$\begin{aligned} d_i h(y \otimes \underline{a}) &= d_i s_0(y) \otimes (1, a_1, ..., a_{i-1} \circ_i^{s_0(y)} a_i, ..., a_n) \\ &= s_0 d_{i-1}(y) \otimes (1, a_1, ..., a_{i-1} \circ_{i-1}^{y} a_i, ..., a_n) = hd_{i-1}(y \otimes \underline{a}), \end{aligned}$$

se si osserva che la i-esima foglia di $s_0(y)$ è la foglia numero $i-1$ di y, e che i due operatori $d_i s_0$ e $s_0 d_{i-1}$ producono la stessa modificazione. □

Si noti che l'ipotesi che D abbia una bar-unità può essere alleggerita richiedendo che esista un elemento $1 \in D$ tale che $1 \vdash a = a$ per tutti gli $a \in D$. Dualmente, potremo richiedere che valga $a \dashv 1 = a$ per ogni $a \in D$, e di conseguenza usare l'omotopia $h(y \otimes \underline{a}) := s_n(y) \otimes (\underline{a}, 1)$, dove s_n biforca la n-esima foglia di y.

Per $D = k$ otteniamo subito il seguente caso particolare.

2.3.2 - Corollario. *Il complesso bar degli alberi binari $(k[Y_*], d')$ è aciclico.*

2.4 L'operad Dias è di Koszul.

2.4.1 - Teorema. *Sia $\bar{D}ias(V) = T(V) \otimes V \otimes T(V)$ la dialgebra libera sul k-modulo V. Allora l'omologia bar di $\bar{D}ias(V)$ è*

$$HY_n(\bar{D}ias(V)) = \begin{cases} V, & per\ n = 1, \\ 0, & per\ n > 1. \end{cases}$$

Dimostrazione. [Loday] Si considerano l'identità e l'applicazione nulla sul complesso di catene $CY_*(\bar{D}ias(V))$. Si definisce un'omotopia

$$h : k[Y_n] \otimes \bar{D}ias(V)^{\otimes n} \longrightarrow k[Y_{n+1}] \otimes \bar{D}ias(V)^{\otimes n+1},$$

fra queste due mappe, in base alla forma dell'elemento $y \otimes \underline{v}$ di $k[Y_n] \otimes \bar{D}ias(V)^{\otimes n}$.È necessario distinguere cinque casi, che vengono dettagliatamente descritti in [L5] e [L6]. □

2.4.2 - Corollario. *Le operad $\mathcal{D}ias$ e $\mathcal{D}ias^!$ sono di Koszul.*

Dimostrazione. Il complesso bar delle dialgebre definito in (2.1.4) coincide col complesso di catene definito da Ginzburg e Kapranov per l'operad $\mathcal{D}ias$, quindi

$$HY_n(D) = H_n^{\mathcal{D}ias}(D)$$

per ogni $n \geq 1$. Dunque, per il teorema 4.2.5 di [G-K], questo risultato è una consequence del teorema (2.4.1). $\square$

Chapter 3

Rappresentazioni delle dialgebre

Le rappresentazioni di un'algebra associativa sono i bimoduli di A, cioè spazi vettoriali dotati di due azioni associative di A, una sinistra ed una destra. Per le dialgebre, gli analoghi spazi vettoriali sono evidentemente muniti di quattro azioni, una per ogni simbolo $\dashv, \vdash$ e per ogni lato, soddisfacenti le relazioni (D) che sostituiscono la proprietà associativa.

3.1 Definizione ed esempi.

3.1.1 - Rappresentazioni. Sia D una dialgebra sul campo k. Una *rappresentazione* di D è un k-spazio vettoriale M munito di quattro azioni di D, due azioni destre $\dashv, \vdash: M \otimes D \longrightarrow M$ e due azioni sinistre $\dashv, \vdash: D \otimes M \longrightarrow M$, soddisfacenti i 15 assiomi dati dai 5 assiomi (D) che definiscono i prodotti di dialgebra (1.1.1) per ogni possibilità di prendere uno dei tre elementi a, b o c in M. Indichiamo queste relazioni con (RD).

Se D ha una bar-unità 1, una rappresentazione M su D si chiama *unitaria* se per ogni $m \in M$ si ha $1 \vdash m = m = m \dashv 1$.

3.1.2 - Esempi.

1. Ogni dialgebra D è chiaramente una rappresentazione su se stessa, ed è una rappresentazione unitaria se D ha una bar-unità. Analogamente, ogni ideale I è una rappresentazione di D.

2. Data una dialgebra D su k, ogni k-modulo M può essere munito di una struttura di D-rappresentazione, ponendo $m \star a := 0 =: a \star m$ per ogni $m \in M$ e $a \in D$. Chiamiamo M la rappresentazione *triviale* di D. Si noti che quando D ha una bar-unità 1, la rappresentazione triviale non può essere una rappresentazione unitaria, a meno che $M = 0$.

3. Sia D una dialgebra, $Z(D)$ l'ideale generato dagli elementi $a \dashv b - a \vdash b$ per ogni $a, b \in D$ e $D_{as} = D/Z(D)$ l'algebra associativa canonica di D. L'ideale $Z(D)$ è una rappresentazione sulla dialgebra $(D_{as})_{di}$, con azioni date da
$$z \star [a] := z \star a \quad \text{e} \quad [a] \star z := a \star z,$$
per ogni $z \in Z(D)$ e $[a] \in (D_{as})_{di}$. Infatti la scelta di un elemento rappresentativo $a \in D$ per la classe $[a] \in (D_{as})_{di}$ non è rilevante, perché ogni altro rappresentante a' della classe $[a]$ differisce da a per un elemento z' di $Z(D)$, $a = a' + z'$, e siccome $Z(D)$ è una dialgebra abeliana, si ha
$$z \star a = z \star a' + z \star z' = z \star a'.$$

4. Sia D una dialgebra ed M una rappresentazione di D. Allora, per ogni $r \geq 1$, il k-modulo $\mathrm{M}_r(M)$ delle matrici $r \times r$ a coefficienti in M è una rappresentazione della dialgebra $\mathrm{M}_r(D)$, con ovvie azioni 'riga $\times$ colonna'.

3.1.3 - Rappresentazioni simmetriche e antisimmetriche. Sia D una dialgebra, ed M una D-rappresentazione. Le relazioni 1,2 e 4,5 di (D) mostrano che le identità

$$b \dashv (m \dashv a - m \vdash a) = 0 \quad , \quad (m \dashv a - m \vdash a) \vdash b = 0,$$

$$b \dashv (a \dashv m - a \vdash m) = 0 \quad , \quad (a \dashv m - a \vdash m) \vdash b = 0$$

valgono per ogni $m \in M$ e $a, b \in D$. La rappresentazione si chiama *simmetrica* se vale la condizione più forte

$$(SRD) \begin{cases} m \dashv a - m \vdash a = 0, \\ a \dashv m - a \vdash m = 0. \end{cases}$$

Si chiama *antisimmetrica* se

$$(ARD) \quad a \dashv m = 0 = m \vdash a.$$

3.1.4 - Esempi.

1. L'ideale $Z(D)$ è una rappresentazione anti-simmetrica di $(D_{as})_{di}$.

2. Sia M una rappresentazione di una dialgebra D e si consideri la sotto-rappresentazione $Z(M)$ di M generata dagli elementi $a \dashv m - a \vdash m$ e $m \dashv a - m \vdash a$, per tutti gli $m \in M$ e $a \in D$. Le identità 1,2 di (RD) mostrano che $D \dashv Z(M) = 0$. Analogamente, le identità 4,5 mostrano che $Z(M) \vdash D = 0$. Quindi $Z(M)$ è una rappresentazione antisimmetrica di D, mentre il quoziente $M/Z(M)$ è evidentemente una rappresentazione simmetrica.

3.2 Rappresentazioni e bimoduli.

3.2.1 - Dai bimoduli alle rappresentazioni di dialgebra. Sia D una dialgebra. Dato un bimodulo M sull'algebra associativa D_{as}, si posson definire due rappresentazioni di D, con k-modulo soggiacente M. Per definizione, una è la rappresentazione simmerica con azioni

$$m \star a := m \cdot [a] \quad \text{e} \quad a \star m := [a] \cdot m,$$

dove $[a]$ denota l'immagine di $a \in D$ nella proiezione $D \longrightarrow D_{as}$, e l'altra è la rappresentazione antisimmetrica con azioni

$$m \dashv a := m \cdot [a] \quad , \quad a \vdash m := [a] \cdot m,$$

$$m \vdash a := 0 \qquad , \quad a \dashv m := 0,$$

per $m \in M$ e $a \in D$. (Si noti il caso particolare $M = D_{as}$.) In questo modo si ottengono due funtori, dalla categoria dei bimoduli su D_{as} alla categoria delle rappresentazioni simmetriche e rispettivamente antisimmetriche di D. Mostriamo che questi due funtori sono invertibili.

3.2.2 - Dalle rappresentazioni ai bimoduli. Sia D una dialgebra ed M una rappresentazione di D. Se M è simmetrica, o antisimmetrica, possiamo definire su M una struttura di bimodulo sull'algebra associativa D_{as}, ponendo

$$m \cdot [a] := m \dashv a \quad \text{e} \quad [a] \cdot m := a \vdash m.$$

Indichiamo questo bimodulo con M_{as}.

3.2.3 - Proposizione. *Sia D una dialgebra, e D_{as} la sua algebra associativa canonica. La categoria dei D_{as}-bimoduli è equivalente alla categoria delle D-rappresentazioni simmetriche (risp. antisimmetriche).*

Dimostrazione. I due funtori descritti in (3.2.1) sono chiaramente fedeli, e sono anche pieni. Infatti, date due rappresentazioni simmetriche (o antisimmetriche) M ed M' di D, definite su due bimoduli di D_{as}, ogni morfismo $f : M \longrightarrow M'$ è indotto da un morfismo di bimoduli. □

In particolare, i bimoduli su un'algebra associativa A sono equivalenti alle rappresentazioni simmetriche (risp. antisimmetriche) di A_{di}.

3.2.4 - Corollario. *Data una dialgebra D, la categoria delle D-rappresentazioni simmetriche è equivalente alla categoria delle D-rappresentazioni antisimmetriche.*

Dimostrazione. Data una D-rappresentazione simmetrica M, con azioni $m \dashv a = m \vdash a$ e $a \dashv m = a \vdash m$, definiamo una rappresentazione antisimmetrica M' sul k-modulo M ponendo $m \dashv' a := m \dashv a$, $m \vdash' a := 0$ e $a \vdash' m := a \vdash m$, $a \dashv' m := 0$. Il funtore $M \mapsto M'$ definisce l'equivalenza di categorie. □

3.3 Rappresentazioni di dialgebre e di algebre di Leibniz.

3.3.1 - Rappresentazioni delle algebre di Leibniz. Data un'algebra di Leibniz $\mathfrak{g}$, una *rappresentazione* di $\mathfrak{g}$ è un k-modulo M munito di un'azione sinistra ed una destra di $\mathfrak{g}$, entrambe indicate con $[\ ,\ ]$, che soddisfano le relazioni di Leibniz (L) citate in (1.4.1) qualunque sia la scelta di x, y o z in M.

3.3.2 - Dalle rappresentazioni di dialgebra a quelle di Leibniz. Sia D una dialgebra con una rappresentazione M. Poniamo

$$[m, a] := m \dashv a - a \vdash m \quad \text{e} \quad [a, m] := a \dashv m - m \vdash a,$$

per ogni $m \in M$ e $a \in D$, e indichiamo con M_L il k-modulo M con queste nuove operazioni.

3.3.3 - Proposizione. *Sia D_L l'algebra di Leibniz di una dialgebra D, con commutatore $[a, b] = a \dashv b - b \vdash a$. Data una D-rappresentazione M, il k-modulo M_L definito sopra è una rappresentazione dell'algebra di Leibniz D_L.*

Inoltre, se M è una rappresentazione simmetrica di D (risp. anti-simmetrica), allora M_L è una rappresentazione simmetrica di D_L (risp. anti-simmetrica).

Dimostrazione. Si tratta di verificare manualmente le formule, con calcoli del tutto analoghi a quelli che mostrano che D_L è un'algebra di Leibniz se D è una dialgebra. □

Chapter 4

Coomologia delle dialgebre

Classicamente, la coomologia è la teoria duale dell'omologia. Le cocatene sono applicazioni lineari dai moduli di catene allo spazio dei coefficienti. Le facce sulle cocatene sono mappe duali delle facce sulle catene, e solo la prima e l'ultima faccia utilizzano la struttura di modulo dei coefficienti, da destra e da sinistra rispettivamente.

La particolarità della coomologia è nel secondo gruppo, che solitamente classifica le estensioni abeliane delle algebre nella categoria data. Così è per le algebre associative, di Lie e di Leibniz, e, come vedremo, anche per le dialgebre.

4.1 Complesso di cocatene.

4.1.1 - Complesso di cocatene delle dialgebre. Sia D una dialgebra su k ed M una rappresentazione di D. Per ogni numero naturale n, chiamiamo *modulo delle n-cocatene di D a coefficienti in M* il k-modulo

$$CY^n(D, M) := \mathrm{Hom}_k(k[Y_n] \otimes D^{\otimes n}, M).$$

In particolare, visto che gli insiemi di alberi Y_0 e Y_1 contengono solo un albero, rispettivamente $|$ e $\curlyvee$, il modulo delle 0-cocatene è $CY^0(D, M) = \mathrm{Hom}_k(k, M) \cong M$, e il modulo delle 1-cocatene è $CY^1(D, M) = \mathrm{Hom}_k(D, M)$.

Per ogni numero naturale n, definiamo l'*operatore di cobordo* $\delta : CY^n(D, M) \longrightarrow CY^{n+1}(D, M)$ come l'applicazione k-lineare $\delta = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \delta^i$, data per mezzo delle seguenti facce:

$$(\delta^i f)(y \otimes (a_1, ..., a_{n+1})) := \begin{cases} a_1 \circ_0^y f(d_0(y) \otimes (a_2, ..., a_n)), & \text{per } i = 0, \\ f(d_i(y) \otimes (a_1, ..., a_i \circ_i^y a_{i+1}, ..., a_{n+1})) & \text{per } i = 1, ..., n, \\ f(d_{n+1}(y) \otimes (a_1, ..., a_n)) \circ_n^y a_{n+1}, & \text{per } i = n+1, \end{cases}$$

per ogni $y \in Y_{n+1}$, $a_1, ..., a_{n+1} \in D$ e $f : k[Y_n] \otimes D^{\otimes n} \longrightarrow M$, e dove le mappe $\circ^i : Y_n \longrightarrow \{\dashv, \vdash\}$

sono definite in (2.1.4) per $i = 1, ..., n-1$, e come segue per $i = 0$ e $i = n$:

$$\circ_0^y := \begin{cases} \dashv, & \text{se } y \text{ ha forma} \\ \vdash, & \text{se } y \text{ ha forma} \end{cases}$$

$$\circ_n^y := \begin{cases} \vdash, & \text{se } y \text{ ha forma} \\ \dashv, & \text{se } y \text{ ha forma} \end{cases}$$

4.1.2 - Osservazione. Si osservi che per ogni $n \geq 1$ e per ogni $i = 1, ..., n$, la faccia $\delta^i : CY^n(D, M) \longrightarrow CY^{n+1}(D, M)$ è duale della faccia $d_i : CY_{n+1}(D) \longrightarrow CY_n(D)$, definita in (2.1.4), nel senso seguente. Dato un $(n+1)$-albero y ed un elemento $\underline{a} = (a_1, ..., a_{n+1})$ di $D^{\otimes n+1}$, allora

$$\delta^i f(y \otimes \underline{a}) = f(d_i(y \otimes \underline{a}))$$

per ogni $1 \leq i \leq n$.

4.1.3 - Lemma. *Gli operatori di cobordo $\delta : CY^n(D, M) \longrightarrow CY^{n+1}(D, M)$ definiti sopra soddisfano l'identità $\delta \circ \delta = 0$.*

Dimostrazione. È sufficiente verificare che le facce δ^i soddisfino le relazioni simpliciali

$$\delta^j \delta^i = \delta^i \delta^{j-1}, \quad i < j.$$

In particolare, dopo (4.1.2), è sufficiente mostrare che le relazioni valgono per $i = 0$ con j che varia da 1 a $n+2$, e per $j = n+2$ con i che varia da 0 a $n+1$.

(i) Verifichiamo che $\delta^j \delta^0 = \delta^0 \delta^{j-1}$ per $j = 1, ..., n+2$. Sia $f : k[Y_n] \otimes D^{\otimes n} \longrightarrow M$ un'applicazione lineare, e fissiamo un elemento $y \otimes \underline{a} = y \otimes (a_1, ..., a_{n+2}) \in k[Y_{n+2}] \otimes D^{\otimes n+2}$. Allora, per $j = 1$ da un lato abbiamo:

$$\delta^1 \delta^0 f(y \otimes \underline{a}) = (a_1 \circ_1^y a_2) \circ_0^{d_1(y)} f(d_0 d_1(y) \otimes \underline{a}') = \begin{cases} (a_1 \dashv a_2) \dashv m, & \text{se } y = \\ (a_1 \vdash a_2) \dashv m, & \text{se } y = \\ (a_1 \star a_2) \vdash m, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove abbiamo chiamato $m := f(d_0 d_1(y) \otimes \underline{a}')$. Si noti che il simbolo $\star$ quì significa che per alcuni alberi si ha il prodotto $\dashv$, per altri il prodotto $\vdash$, ma grazie alle uguaglianze 4 e 5 di (D) il risultato finale è sempre $(a_1 \vdash a_2) \vdash m$. Dall'altro lato, si ha:

$$\delta^0 \delta^0 f(y \otimes \underline{a}) = a_1 \circ_0^y [a_2 \circ_0^{d_0(y)} f(d_0 d_0(y) \otimes \underline{a}')] = \begin{cases} a_1 \dashv (a_2 \star' m), & \text{se } y = \\ a_1 \vdash (a_2 \dashv m), & \text{se } y = \\ a_1 \vdash (a_2 \vdash m), & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove abbiamo identificato $f(d_0 d_0(y) \otimes \underline{a}')$ con $f(d_0 d_1(y) \otimes \underline{a}') = m$ per via dell'uguaglianza $d_0 d_1 = d_0 d_0$. Dunque l'uguaglianza di questi due termini è conseguenza degli assiomi della rappresentazione M.

Per $j > 1$ da un lato abbiamo:

$$\delta^j \delta^0 f(y \otimes \underline{a}) = a_1 \circ_0^{d_j(y)} f(d_0 d_j(y) \otimes (a_2, ..., a_j \circ_j^y a_{j+1}, ..., a_{n+2})),$$

e dall'altro:

$$\delta^0 \delta^{j+1} f(y \otimes \underline{a}) = a_1 \circ_0^y f(d_{j-1} d_0(y) \otimes (a_2, ..., a_j \circ_{j-1}^{d_0(y)} a_{j+1}, ..., a_{n+2})).$$

Quindi l'uguaglianza dei due termini è conseguenza delle identità $d_0 d_j = d_{j-1} d_0$, $\circ_0^{d_j(y)} = \circ_0^y$ e $\circ_{j-1}^{d_0(y)} = \circ_j^y$ per ogni $j > 1$.

(ii) Verifichiamo ora che $\delta^{n+2}\delta^i = \delta^i \delta^{n+1}$ per $i = 0, ..., n+1$. Prendiamo di nuovo un'applicazione lineare $f : k[Y_n] \otimes D^{\otimes n} \longrightarrow M$ e fissiamo un elemento $y \otimes \underline{a} = y \otimes (a_1, ..., a_{n+2}) \in k[Y_{n+2}] \otimes D^{\otimes n+2}$. Allora, per $i = n+1$, da un lato si ha:

$$\delta^{n+2}\delta^{n+1} f(y \otimes \underline{a}) = [f(d_{n+1} d_{n+2}(y) \otimes \underline{a}') \circ_{n+1}^{d_{n+2}(y)} a_{n+1}] \circ_{n+2}^y a_{n+2}$$

$=$

- $(m \star a_{n+1}) \vdash a_{n+2}$, se $y =$ 
- $(m \vdash a_{n+1}) \dashv a_{n+2}$, se $y =$ 
- $(m \dashv a_{n+1}) \dashv a_{n+2}$, altrimenti

dove $m := f(d_{n+1} d_{n+2}(y) \otimes \underline{a}')$. Dall'altro:

$$\delta^{n+1}\delta^{n+1} f(y \otimes \underline{a}) = f(d_{n+1} d_{n+1}(y) \otimes \underline{a}') \circ_{n+1}^{d_{n+1}(y)} (a_{n+1} \circ_{n+1}^y a_{n+2})$$

$=$

- $m \vdash (a_{n+1} \vdash a_{n+2})$, se $y =$ 
- $m \vdash (a_{n+1} \dashv a_{n+2})$, se $y =$ 
- $m \vdash (a_{n+1} \star' a_{n+2})$, altrimenti

dove abbiamo identificato $f(d_{n+1} d_{n+1}(y) \otimes \underline{a}')$ con $f(d_{n+1} d_{n+2}(y) \otimes \underline{a}') = m$ grazie a $d_{n+1} d_{n+2} = d_{n+1} d_{n+1}$. Perciò l'uguaglianza di questi due termini è di nuovo conseguenza degli assiomi sulla rappresentazione M.

Infine, per $i < n+1$,da un lato abbiamo:

$$\delta^{n+2}\delta^i f(y \otimes \underline{a}) = f(d_i d_{n+2}(y) \otimes (a_1, ..., a_i \circ_i^{d_{n+2}(y)} a_{i+1}, ..., a_{n+1})) \circ_{n+2}^y a_{n+2},$$

e dall'altro:

$$\delta^i \delta^{n+1} f(y \otimes \underline{a}) = f(d_{n+1} d_i(y) \otimes (a_1, ..., a_i \circ_i^y a_{i+1}, ..., a_{n+1})) \circ_{n+1}^{d_i(y)} a_{n+2}.$$

Di nuovo, quindi, questi due termini coincidono per via delle uguaglianze $d_i d_{n+2} = d_{n+1} d_i$, $\circ_i^{d_{n+2}(y)} = \circ_i^y$ e $\circ_{n+1}^{d_i(y)} = \circ_{n+2}^y$ per ogni $i < n+1$. $\square$

4.2 Coomologia e derivazioni.

4.2.1 - Coomologia delle dialgebre. Sia D una dialgebra su k ed M una rappresentazione di D. Si chiama *coomologia di dialgebra di D a coefficienti in M* l'omologia del complesso di cocatene descritto sopra,

$$HY^n(D,M) := H_n(CY^*(D,M),\delta)$$

per ogni $n \geq 0$. In particolare, quando $M = D$, adottiamo la notazione standard $HHY^*(D) := HY^*(D,D)$.

4.2.2 - Derivazioni sulle dialgebre. Sia D una dialgebra su un campo k, e sia M una rappresentazione di D. Una *derivazione su D a valori in M* è un'applicazione lineare $\mu : D \longrightarrow M$ tale che

$$\mu(a \star b) = \mu(a) \star b + a \star \mu(b),$$

per ogni $a, b \in D$. Indichiamo con $\mathrm{Der}_{D/k}(D,M)$, o semplicemente con $\mathrm{Der}(D,M)$, il k-modulo delle derivazioni su D a valori in M.

Per ogni $m \in M$, l'applicazione aggiunta $ad_m = [-,m] : D \longrightarrow M$ è una derivazion che chiamiamo *derivazione interna di D in M*. (Ricordiamo che $[a,m] = a \dashv m - m \vdash a$ per ogni $a \in D$.) L'insieme delle derivazioni interne si indica con

$$\mathrm{Inn}(D,M) = \{ad_m \in \mathrm{Der}(D,M) | \text{ per all } m \in M\}.$$

Si noti che, al contrario delle algebre associative, la mappa $[m,-] : D \longrightarrow M$, che è ancora definita per ogni $m \in M$ come $[m,a] = m \dashv a - a \vdash m$, *non* è una derivazione di D!

4.2.3 - Calcoli elementari. Data una dialgebra D ed una rappresentazione M, lo zero cobordo di D in M è l'applicazione lineare $\delta : M \longrightarrow \mathrm{Hom}(D,M)$ definita da $\delta m(a) := a \dashv m - m \vdash a = [a,m]$, per ogni $m \in M$ e $a \in D$. Perciò $HY^0(D,M)$ è il sottomodulo degli invarianti di M,

$$HY^0(D,M) = M^D = \{m \in M | \ [a,m] = 0 \ \text{ per ogni } a \in D\}.$$

Il primo operatore di cobordo è l'applicazione lineare $\delta : Hom_k(D,M) \longrightarrow Hom_k(k[Y_2] \otimes D^{\otimes 2}, M)$ data esplicitamente da

$$(\delta g)(\curlyvee \otimes (a,b)) := g(a) \dashv b - g(a \dashv b) + a \dashv g(b),$$

$$(\delta g)(\curlyvee \otimes (a,b)) := g(a) \vdash b - g(a \vdash b) + a \vdash g(b),$$

per ogni mappa lineare $g : k[Y_1] \otimes D \cong D \longrightarrow M$ e ogni $a, b \in D$. Quindi gli 1-cocicli di D a valori in M sono le derivazioni, mentre gli 1-cobordi sono le derivazioni interne. Dunque abbiamo

$$HY^1(D,M) = \mathrm{Der}(D,M)/\mathrm{Inn}(D,M).$$

Si noti che il primo cobordo utilizza una biezione fra l'insieme Y_2 dei 2-alberi e l'insieme $\{\dashv, \vdash\}$ delle operazioni binarie date sulla dialgebra: l'albero $\curlyvee$corrisponde al prodotto $\dashv$ e l'albero $\curlyvee$corrisponde al prodotto $\vdash$.

4.3 Estensioni abeliane delle dialgebre.

4.3.1 - Estensioni abeliane delle dialgebre. Sia D una dialgebra su k. Per definizione, una *estensione abeliana* di D è una sequenza esatta di dialgebre

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} D' \xrightarrow{\pi} D \longrightarrow 0,$$

che è split come sequenza di k-moduli (cioè la proiezione di k-moduli $\pi : D' \longrightarrow D$ ammette una sezione $\sigma : D \longrightarrow D'$ tale che $\pi \circ \sigma = id_D$), e dove $M = \ker\pi$ è una dialgebra abeliana (i.e. $M \dashv M = 0 = M \vdash M$).

La prima condizione forza lo spazio vettoriale soggiacente la dialgebra D' ad essere una somma diretta $M \oplus D$, con inclusione $i(m) = (m, 0)$, proiezione $\pi(m, a) = a$ e sezione $\sigma(a) = (g(a), a)$ con arbitraria mappa lineare $g : D \longrightarrow M$. La sola struttura che rimane da specificare è la struttura di dialgebra su $M \oplus D$, data da un prodotto in forma generica

$$(m, a) \star (n, b) := (m \star b + a \star n + f(\star; a, b), a \star b),$$

per ogni $m, n \in M$ e $a, b \in D$. Per avere su $M \oplus D$ una struttura di dialgebra, la mappa lineare arbitraria $f : k[\dashv, \vdash] \otimes D^{\otimes 2} \longrightarrow M$ deve soddisfare una "condizione di cociclo" che ora descriviamo.

La seconda condizione definisce su M una struttura di D-rappresentazione, data dalle azioni

$$m \star a := i(m) \star a' \qquad \text{e} \qquad a \star m := a' \star i(m)$$

dove $a' \in D'$ è scelto in modo che $\pi(a') = a$. Poiché l'elemento a' deve avere la forma (m', a), per qualche $m' \in M$, è immediato verificare che qualunque scelta di $m' \neq 0$ non influenza la definizione data sopra.

Data una rappresentazione M di D, chiamiamo *estensione abeliana di D su M* un'estensione abeliana tale che la struttura di D-rappresentazione indotta su M coincida con quella data.

Due estensioni abeliane di D su M, per esempio D' e D'', sono dette *equivalenti* se esiste una mappa di dialgebre $D' \longrightarrow D''$ che sia compatibile con l'identità su M e su D. Indichiamo con $\mathrm{Ext}(D, M)$ l'insieme delle classi di estensioni di D su M.

4.3.2 - Estensioni abeliane triviali. Sia D una dialgebra, e fissiamo una rappresentazione M di D. Un'estensione abeliana di D su M è detta *triviale* se è split come sequenza di dialgebre (cioè c'è una sezione σ che è un morfisno di dialgebre).

Il prototipo dell'estensione triviale di D su M è la dialgebra $M \oplus D$ con prodotti associati alla mappa nulla $f = 0$:

$$(m, a) \star (n, b) := (m \star b + a \star n, a \star b),$$

per $m, n \in M$ e $a, b \in D$. Infatti la sequenza esatta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \oplus D \longrightarrow D \longrightarrow 0,$$

è sicuramente split, con sezione $\sigma : D \longrightarrow M \oplus D$ definita da $\sigma(a) := (0, a)$.

Altre possibili sezioni dell'estensione di D su M definita da $f = 0$ sono date da $\sigma(a) := (g(a), a)$, dove $g : D \longrightarrow M$ è una mappa lineare tale che σ sia un morfismo di dialgebre. È facile vedere che ciò vale se e solo se

$$g(a \star b) = g(a) \star b + a \star g(b),$$

per ogni $a, b \in D$, cio'e quando $g \in \mathrm{Der}(D, M)$. Da (4.2.3) segue immediatamente che le sezioni dell'estensione abeliana triviale sono classificate da una "condizione di cociclo" su g:
L'applicazione $\sigma : D \longrightarrow M \oplus D, a \mapsto (g(a), a)$ è una sezione per l'estensione abeliana triviale di D su M se e solo se la mappa lineare $g : D \longrightarrow M$ è una derivazione, cioè $\delta(g) = 0$.

L'estensione abeliana definita dalla dialgebra $M \oplus D$ con prodotti associati ad $f = 0$ non è l'unica estensione triviale di D su M. Ecco le rimanenti.

4.3.3 - Lemma. *Sia D una dialgebra su k, e M una rappresentazione di D. L'estensione abeliana di D su M definita su $M \oplus D$ per mezzo di una mappa lineare $f : k[Y_2] \otimes D^{\otimes 2} \longrightarrow M$ è triviale se e solo se f è un 2-cobordo, cioè esiste una mappa lineare $g : D \longrightarrow M$ tale che $f = \delta(g)$. La sua sezione è dunque $\sigma : D \longrightarrow M \oplus D, \sigma(a) := (g(a), a)$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'estensione abeliana $M \oplus D$ con struttura di dialgebra definita da f. L'estensione è triviale se e solo se esiste una sezione $\sigma : D \longrightarrow M \oplus D$ che è un morfismo di dialgebre, cioè $\sigma(a \star b) = \sigma(a) \star \sigma(b)$ per ogni $a, b \in D$. Una sezione deve essere della forma $\sigma(a) = (g(a), a)$, dove $g : D \longrightarrow M$ è una mappa lineare. Poi, ricordando la definizione dei prodotti di $M \oplus D$ associati a f, la g deve soddisfare la condizione

$$g(a \star b) = g(a) \star b + a \star g(b) + f(\star; a, b),$$

per ogni $a, b \in D$. Questa condizione è essenzialmente $\delta(g) = f$. $\square$

Possiamo ora caratterizzare le mappe f che definiscono la struttura di dialgebra sullo spazio vettoriale $M \oplus D$.

4.3.4 - Lemma. *Sia D una dialgebra su k, ed M una rappresentazione di D. Allora i prodotti definiti su $M \oplus D$ da una mappa lineare $f : k[Y_2] \otimes D^{\otimes 2} \longrightarrow M$ determinano una struttura di estensione abeliana di D su M se e solo se f è un 2-cociclo, cioè $\delta(f) = 0$.*

Dimostrazione. Sia $f : k[Y_2] \otimes D^{\otimes 2} \longrightarrow M$ una mappa lineare. Usando la biezione $\{\dashv, \vdash\} \simeq Y_2$ descritta sopra, consideriamo i prodotti su $M \oplus D$ definiti da f. Si tratta solo di trovare le condizioni per cui questi prodotti soddisfano gli assiomi di dialgebra.

Fissiamo la seguente biezione fra i cinque assiomi (D) di una dialgebra (1.1.1) ed i cinque alberi dell'insieme Y_3: gli assiomi 1, 2, 3, 4, 5 di (D) corrispondono rispettivamente agli alberi , , , , di Y_3. Ne segue, per calcolo diretto, che i cinque assiom (D) per la dialgebra $M \oplus D$ producono cinque condizioni sulla mappa f e su ogni tripla di elementi di D che sono equivalenti alla condizione $\delta(f) = 0$. $\square$

4.3.5 - Teorema. *Sia D una dialgebra su k e M una rappresentazione di D. La mappa che associa un 2-cociclo f all'estensione abeliana di D su M data dalla dialgebra $M \oplus D$, con prodotti definiti da f, induce un isomorfismo naturale*

$$HY^2(D, M) \cong \mathrm{Ext}(D, M).$$

Dimostrazione. Rimane da mostrare solo che le classi di coomologia dei 2-cocicli corrispondono biettivamente alle classi di equivalenza di estensioni abeliane. In altre parole, che quando un 2-cociclo f viene modificato con un cobordo $\delta(g)$ in un nuovo 2-cociclo $f' = f + \delta(g)$, le due corrispondenti estensioni sono equivalenti. Questo si prova immediatamente, con equivalenza data dalla mappa $M \oplus D \longrightarrow (M \oplus D)' : (m, a) \mapsto (m + g(a), a)$. L'inverso segue dal lemma (4.3.3). $\square$

4.3.6 - Elemento caratteristico di una dialgebra. Sia D una dialgebra e $D_{as} = D/Z(D)$ la sua algebra associativa canonica. Allora, come si è visto in (3.1.2-3), l'ideale $Z(D)$ è una dialgebra abeliana ed anche una rappresentazione su $(D_{as})_{di}$. Quindi la sequenza esatta

$$0 \longrightarrow Z(D) \longrightarrow D \longrightarrow (D_{as})_{di} \longrightarrow 0$$

presenta la dialgebra D come estensione abeliana di $(D_{as})_{di}$ su $Z(D)$. Quindi determina un elemento in $HY^2((D_{as})_{di}, Z(D))$. Chiamiamo questo elemento *elemento caratteristico* della dialgebra D, e lo indichiamo con $ch(D)$.

Chapter 5

Algebra inviluppo universale

La dualità fra i gruppi di omologia e di coomologia si riflette nella dualità fra le categorie dei loro rispettivi moduli dei coefficienti. Per le algebre associative e di Lie, queste categorie sono equivalenti, e coincidono in entrambi i casi con quelle dei bimoduli, o rappresentazioni, sull'algebra data. Per le algebre di Leibniz questo non è più vero. In questo caso, la categoria dei coefficienti per la coomologia, cioè quella delle rappresentazioni, ammette una categoria duale di moduli, chiamati corappresentazioni, che non è equivalente a quella precedente, ma permette di stabilire una dualità fra le teorie di coomologia ed omologia. (Ulteriori dettagli possono essere trovati in [L-P].) Per le dialgebre si ha la stessa situazione.

Nel prossimo capitolo introduciamo la nozione duale di una rappresentazione su una dialgebra D, cioè una corappresentazione su D. Per farlo, è di grande aiuto definire, per ogni dialgebra D, un'algebra associativa unitaria $E(D)$ con la proprietà seguente: la categoria delle rappresentazioni su D è isomorfa alla categoria dei moduli sinistri su $E(D)$. Le corappresentazioni di D, poi, si definiscono come i moduli destri su $E(D)$.

L'algebra inviluppo universale è di per se di grande interesse per le dialgebre, poiché riveste un ruolo fondamentale in molte utili costruzioni. Perciò la descriviamo nei dettagli.

5.1 Definizione ed esempi.

5.1.1 - Algebra inviluppo universale. Sia D una dialgebra su k. Siano x, u, y, v quattro simboli e consideriamo l'algebra associativa unitaria libera $T(Dx \oplus Du \oplus Dy \oplus Dv)$ sul k-modulo dato da quattro copie di D, contrassegnate con i quattro simboli dati,

$$Dx \oplus Du \oplus Dy \oplus Dv := k\{x(a), u(a), y(a), v(a) \mid a \in D\}.$$

Il prodotto associativo, in questa algebra, viene indicato con $\cdot$ o omesso.

Per definizione, l'*algebra inviluppo universale* $E(D)$ è il quoziente di questa algebra sull'ideale generato dagli elementi che corrispondono alle 15 relazioni seguenti

$$
(ED)\quad \left\{
\begin{array}{l}
x(a)\cdot x(b) \overset{1}{=} x(a\dashv b) \overset{2}{=} x(a\vdash b)\\[4pt]
y(a)\cdot y(b) \overset{3}{=} y(b\dashv a) \overset{4}{=} y(b\vdash a)\\[4pt]
x(a)\cdot y(b) \overset{5}{=} y(b)\cdot x(a)\\[4pt]
x(a)\cdot u(b) \overset{6}{=} u(a\vdash b)\\[4pt]
u(a)\cdot u(b) \overset{7}{=} u(a)\cdot x(b) \overset{8}{=} u(a\dashv b)\\[4pt]
y(a)\cdot v(b) \overset{9}{=} v(b\dashv a)\\[4pt]
v(a)\cdot v(b) \overset{10}{=} v(a)\cdot y(b) \overset{11}{=} v(b\vdash a)\\[4pt]
x(a)\cdot v(b) \overset{12}{=} v(b)\cdot x(a) \overset{13}{=} v(b)\cdot u(a)\\[4pt]
y(a)\cdot u(b) \overset{14}{=} u(b)\cdot y(a) \overset{15}{=} u(b)\cdot v(a)
\end{array}
\right.
$$

per ogni $a, b \in D$.

Se la dialgebra D ha una bar-unità 1, gli elementi $x(1) = y(1) = 1_E$ coincidono con l'unità nell'algebra inviluppo, mentre $u(1)$ è solo una unità destra per $u(a)$ e $v(1)$ è solo una unità destra per $v(a)$, per ogni $a \in D$.

5.1.2 - Proposizione. *Sia D una dialgebra con algebra inviluppo universale $E(D)$. Un k-modulo M è una rappresentazione di D se e solo se è un modulo sinistro su $E(D)$. Se D ha una bar-unità, un k-modulo M è una rappresentazione unitaria di D se e solo se è un modulo unitario su $E(D)$.*

Dimostrazione. Prendiamo una D-rappresentazione M. Definiamo un'azione sinistra di $E(D)$ su M, ponendo, sui generatori di $E(D)$,

$$x(a)\cdot m := a\vdash m \quad , \quad y(a)\cdot m := m\dashv a \ ,$$

$$u(a)\cdot m := a\dashv m \quad , \quad v(a)\cdot m := m\vdash a \ ,$$

per ogni $m \in M$ e $a \in D$. Si può verificare che l'associatività di questa azione è garantita dai 15 assiomi (RD) per la rappresentazione M. Viceversa, partendo da un $E(D)$-modulo sinistro M, le stesse formule sopra definiscono una struttura di D-rappresentazione su M, che è ggarantita, stavolta, dai 15 assiomi (ED).

Analogamente, supponendo che D abbia una bar-unità, è immediato vedere che una D-rappresentazione unitaria definisce un $E(D)$-modulo sinistro unitario, e viceversa. □

5.1.3 - Esempio. Sia $D = T(ke)\otimes ke\otimes T(ke)$ la dialgebra libera su un generatore e. Allora $E(D)$ è l'algebra associativa unitaria generata dall'insieme $\{x = x(e), u = u(e), y = y(e), v = v(e)\}$ modulo le seguenti relazioni

$$x\cdot y = y\cdot x$$

$$u^2 = u\cdot x \ , \ v^2 = v\cdot y$$

$$x\cdot v = v\cdot x = v\cdot u \ , \ y\cdot u = u\cdot y = u\cdot v$$

Infatti, le relazioni (1), (2), (3), (4), (6), (8), (9) e (11) implicano che ogni elemento di grado 1 in $E(D)$, associato agli elementi $e \dashv e$ ed $e \vdash e$ di D, coincide in $E(D)$ con gli elementi x^2, y^2, xu, $ux = u^2$, yv e $vy = v^2$.

Perciò la base di Poincaré-Birchoff-Witt di $E(D)$ è data dalla famiglia di elementi $x^n y^m (u^k + v^l)$ per ogni $n, m, k, l \geq 0$.

5.1.4 - $E(D)$ come rappresentazione. L'algebra inviluppo universale $E(D)$ è essa stessa, evidentemente, una rappresentazione della dialgebra D, con azioni date da

$$a \vdash e := x(a) \cdot e \quad , \quad e \dashv a := y(a) \cdot e \ ,$$

$$a \dashv e := u(a) \cdot e \quad , \quad e \vdash a := v(a) \cdot e \ ,$$

per ogni $e \in E(D)$ e $a \in D$. Dalle relazioni 5, 7, 10, 12, 13, 14 e 15 di (ED) seguono immediatamente alcune proprietà addizionali di queste azioni, precisamente

$$(RED) \quad \begin{cases} x(a) \dashv b \overset{5}{=} a \vdash y(b), \\ x(a) \vdash b \overset{12}{=} a \vdash v(b), \\ u(a) \dashv b \overset{14}{=} a \dashv y(b), \\ a \dashv [x(b) - u(b)] \overset{7}{=} 0 \overset{13}{=} [x(b) - u(b)] \vdash a, \\ a \dashv [y(b) - v(b)] \overset{15}{=} 0 \overset{10}{=} [y(b) - v(b)] \vdash a, \end{cases}$$

per ogni $a, b \in D$. In particolare, le relazioni 7, 13, 15 e 10 implicano che l'ideale di $E(D)$ generato dagli elementi $x(a) - u(a)$ e $y(a) - v(a)$, per ogni $a \in D$, è una rappresentazione antisimmetrica di D.

5.2 Teorema di Poincaré-Birchoff-Witt.

Il teorema di P-B-W classicamente descrive l'algebra graduata associata alla filtrazione naturale delle algebre inviluppo universali delle algebre di Lie. Per estensione, s'intende la descrizione dell'algebra graduata associata alle algebre inviluppo che sono filtrate, come quella di una dialgebra.

5.2.1 - Filtrazione su $E(D)$. Data una dialgebra D, l'algebra tensoriale $T(Dx \oplus Du \oplus Dy \oplus Dv)$ possiede una filtrazione naturale sulla 'lunghezza' degli elementi, il grado $\deg(v)$ di un elemento omogeneo v è dato dalla lunghezza della sequenza di elementi $x(a), u(b), y(c), v(d)$ che compongono v. Infatti c'è un isomorfismo canonico di k-moduli graduati

$$T(Dx \oplus Du \oplus Dy \oplus Dv) \cong T(Dx) * T(Du) * T(Dy) * T(Dv).$$

Il simbolo $*$ denota il prodotto tensoriale non-commutativo definito su due k-modules V e W da $V * W := V \otimes W \oplus W \otimes V$. Può essere esteso ai k-moduli graduati $T(V)$ e $T(W)$, e dà il k-modulo graduato con componente omogenea

$$(T(V) * T(W))^{(n)} = \bigoplus_{\underline{\lambda} \vdash n} V^{\otimes \lambda_1} \otimes W^{\otimes \lambda_2} \otimes V^{\otimes \lambda_3} \otimes \cdots \otimes W^{\otimes \lambda_k},$$

dove la somma diretta è presa su tutte le partizioni $\underline{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$ dell'intero n, che sono gli insiemi ordinati di interi tale che $\sum_i \lambda_i = n$. (Per ulteriori dettagli su $*$ consultare [L4].)

Questa filtrazione induce sul suo quoziente $E(D)$ un'analoga filtrazione, data dai k-moduli

$$F_k E(D) := \{e \in E(D) | \deg(e) \leq n\},$$

per ogni $k \geq 0$, tali che

$$F_k E(D) \subset F_{k+1} E(D) \text{ for ogni } k \geq 0,$$

$$\bigcup_{k \geq 0} F_k E(D) = E(D),$$

$$F_0 E(D) = k,$$

$$F_p E(D) \cdot F_q E(D) \subset F_{p+q} E(D) \text{ for ogni } p, q \geq 0.$$

Indichiamo con $GrE(D) = \bigoplus_{k \geq 0} Gr^k E(D)$ l'algebra graduata associata alla filtrazione, quindi $Gr^0 E(D) = k$ e $Gr^k E(D) = F_k E(D) / F_{k-1} E(D)$.

5.2.2 - Proposizione. *Sia D una dialgebra con algebra inviluppo universale $E(D)$. Allora l'algebra graduata $GrE(D)$ soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $Gr^1 E(D) \cong Dx \oplus Du \oplus Dy \oplus Dv$,
2. $Gr^2 E(D) \cong D^{\otimes 2} xy \oplus D^{\otimes 2} uv \oplus D^{\otimes 2} vu$,
3. $Gr^k E(D) = 0$ *per ogni* $k \geq 3$.

Dimostrazione. L'asserzione 1. è ovvia.

2. Un elemento di grado 2 in $E(D)$ è la classe $[e]$ di un elemento di grado 2 della tensor algebra $T(Dx \oplus Du \oplus Dy \oplus Dv)$, nell'equivalenza data dalle relazioni (ED). L'elemento e deve essere della forma $e_1(a) \cdot e_2(b)$ per qualche elemento $a, b \in D$, dove ogni e_i, per $i = 1, 2$, rapresenta uno dei quattro simboli x, u, y, v. Fra i 16 possibili prodotti $e_1(a) \cdot e_2(b)$ di questo tipo, nell'algebra tensoriale (per $a, b \in D$ fissati), 7 prodotti si identificano con degli altri nell'algebra quoziente $E(D)$ per via delle relazioni (5), (7), (10), (12), (13), (14) e (15). Poi, fra i 9 prodotti distinti che rimangono in $E(D)$, 6 prodotti sono equivalenti ad elementi di grado 1 per via delle relazioni (1), (3), (6), (8), (9) e (11), e danno classi nulle nel quoziente $F_2 E(D) / F_1 E(D)$. Quindi in $F_2 E(D) / F_1 E(D)$ rimangono solo tre prodotti distinti, che possono essere scelti come $x(a)y(b)$, $u(a)v(b)$ e $v(a)u(b)$ per ogni $a, b \in D$.

3. È sufficiente mostrare l'identità $F_k E(D) = F_{k+1} E(D)$ per $k = 2$. Poiché gli elementi di grado 2 in $E(D)$ sono della forma descritta sopra, è facile vedere, con calcoli diretti e usando le relazioni (ED), che ogni elemento di grado 2 moltiplicato da sinistra o da destra per un'elemento di grado 1 dà ancora un'elemento di grado 2. Per esempio, l'elemento $x(a)y(b)$ moltiplicato per $u(c)$ da sinistra (risp. da destra) dà un'elemento di grado 2 per la relazione (8) (risp. relazioni (14) e (6)). □

La proprietà caratteristica dell'algebra inviluppo universale di una dialgebra, dimostrata nel teorema precedente, si esprime sinteticamente nella seguente forma.

5.2.3 - Corollario. *Indichiamo con V lo spazio vettoriale soggiacente una dialgebra D. Definiamo su V una struttura di dialgebra abeliana, ponendo $a \star b := 0$ per ogni $a, b \in V$. Allora si ha un'isomorfismo*

$$GrE(D) \cong E(V)$$

di algebre associative unitarie.

5.3 Relazione con l'algebra inviluppo delle algebre associative.

5.3.1 - $E(A)$ per le algebre associative. Per un'algebra associativa A, abbiamo ora due nozioni di algebra inviluppo universale. Poiché non si suppone che A abbia l'unità, l'algebra inviluppo classica è $A^e = (A \oplus k) \otimes (A \oplus k)^{op} = A \otimes A^{op} \oplus A \oplus A^{op} \oplus k$, e caratterizza la categoria dei bimoduli su A. Guardando A come dialgebra, l'algebra inviluppo $E(A_{di})$, che indichiamo semplicemente con $E(A)$, è generata dall'insieme $\{x(a), u(a), y(a), v(a) |\ a \in A\}$ con relazioni

$$(EA) \quad \begin{cases} x(ab) = x(a) \cdot x(b) \\ y(ab) = y(b) \cdot y(a) \\ x(a) \cdot y(b) = y(b) \cdot x(a) \\ x(a) \cdot u(b) = u(a) \cdot x(b) = u(a) \cdot u(b) = u(ab) \\ y(a) \cdot v(b) = v(a) \cdot y(b) = v(a) \cdot v(b) = v(ab) \\ x(a) \cdot v(b) = v(b) \cdot x(a) = v(b) \cdot u(a) \\ y(a) \cdot u(b) = u(b) \cdot y(a) = u(b) \cdot v(a) \end{cases}$$

per ogni $a, b \in A$.

Quando l'algebra associativa A ha una unità 1, la sua algebra inviluppo classica è semplicemente $A^e = A \otimes A^{op}$, e l'unità è l'elemento $1 \otimes 1$. Nell'algebra $E(A)$, anche gli elementi $u(1)$ e $v(1)$ sono unità da entrambi i lati, perciò

$$x(1) = u(1) = y(1) = v(1) = 1_E.$$

5.3.2 - Proposizione. *Sia A un'algebra associativa con algebre inviluppo universali A^e e $E(A)$ come sopra. Allora A^e è isomorfa alla sottoalgebra unitaria di $E(A)$ generata dagli elementi $x(a), y(a)$ per ogni $a \in A$.*

Dimostrazione. Le relazioni (EA) mostrano che le mappe $x, u : A \longrightarrow E(A)$ e $y, v : A^{op} \longrightarrow E(A)$ sono morfismi di algebre. È facile vedere, allora, che il morfismo unitario di algebre $A^e \hookrightarrow E(A)$, definito sugli addendi diretti di A^e come

$$A \ni a \mapsto x(a) \quad , \quad A^{op} \ni b \mapsto y(b),$$

$$A \otimes A^{op} \ni a \otimes b \mapsto x(a)y(b),$$

definisce un'inclusione di A^e in $E(A)$. Se A ha una unità, A e A^{op} sono sotto-algebre di A^e, con inclusioni $A \ni a \mapsto a \otimes 1 \in A^e$ e $A^{op} \ni b \mapsto 1 \otimes b \in A^e$. Allora il corrispondente del prodotto $a \otimes b = (a \otimes 1)(1 \otimes b)$ è precisamente il prodotto $x(a)y(b)$. □

5.4 Algebre inviluppo simmetriche ed antisimmetriche.

5.4.1 - Algebre inviluppo simmetriche ed antisimmetriche. Sia D una dialgebra, con algebra inviluppo universale $E(D)$. Definiamo un'ideale di $E(D)$,

$$I(D) := \langle x(a) - u(a), y(a) - v(a) \mid a \in D \rangle,$$

e chiamiamo *algebra inviluppo simmetrica* l'algebra quoziente $S(D) := E(D)/I(D)$.

Viceversa, ponendo

$$J(D) := \langle u(a), v(a) \mid a \in D \rangle,$$

chiamiamo *algebra inviluppo antisimmetrica* l'algebra quoziente $A(D) := E(D)/J(D)$.

5.4.2 - Proposizione. *Sia D una dialgebra e D_{as} la sua algebra associativa canonica. Allora l'algebra inviluppo simmetrica di D, e rispettivamente antisimmetrica, è isomorfa all'algbera inviluppo universale di D_{as} considerata come algebra associativa, cioè*

$$S(D) \cong D_{as}^e \cong A(D).$$

Dimostrazione. Basta riscrivere le relazioni (ED) dopo il quoziente sull'ideale $I(D)$ e $J(D)$ rispettivamente. È immediato vedere che ciò che rimane coincide con l'algebra D_{as}^e come descritta in (5.3.1). □

5.4.3 - Corollario. *La categoria delle rappresentazioni simmetriche di una dialgebra D è equivalente alla categoria dei moduli sinistri sull'algebra inviluppo simmetrica $S(D)$.*

Analogamente, la categoria delle rappresentazioni antisimmetriche di una dialgebra D è equivalente alla categoria dei moduli sinistri sull'algebra inviluppo antisimmetrica $A(D)$.

5.4.4 - Osservazione. Dunque una rappresentazione M è simmetrica (resp. antisimmetrica) se e solo se l'azione sinistra $E(D) \otimes M \longrightarrow M$ passa al quoziente $E(D) \longrightarrow S(D)$ (risp. $E(D) \longrightarrow A(D)$). In altre parole, è sufficiente mostrare che $I(D) \cdot M = 0$ (risp. $J(D) \cdot M = 0$). Si noti allora che come rappresentazioni di D, le algebre $S(D)$ e $A(D)$ sono esse stesse rispettivamente simmetrica ed antisimmetrica. Si noti inoltre che gli ideali $I(D)$ e $J(D)$ hanno la seguente proprietà:

$$J(D) \cdot I(D) = 0.$$

Ciò implica, evidentemente, che l'ideale $I(D)$ è esso stesso una rappresentazione antisimmetrica.

5.5 Relazione con l'algebra inviluppo delle algebre di Leibniz.

5.5.1 - Algebra inviluppo universale di un'algebra di Leibniz. Sia $\mathfrak{g}$ una algebra di Leibniz. L'*algebra inviluppo universale* di $\mathfrak{g}$ è l'algebra associativa unitaria $UL(\mathfrak{g})$ definita come il quoziente dell'algebra associativa unitaria libera $T(\mathfrak{g}^l \oplus \mathfrak{g}^r)$, su due copie del k-modulo $\mathfrak{g}$, modulo l'ideale generato dagli elementi corrispondenti alle tre seguenti relazioni:

$$(UL) \quad \begin{cases} r([a,b]) \stackrel{1}{=} -r(a)r(b) + r(b)r(a) \ , \\ l([a,b]) \stackrel{2}{=} -l(a)r(b) + r(b)l(a) \ , \\ l(a)[l(b) + r(b)] \stackrel{3}{=} 0. \end{cases}$$

È dimostrato, in [L-P], che la categoria delle rappresentazioni sull'algebra di Leibniz $\mathfrak{g}$ è equivalente alla categoria dei moduli sinistri su $UL(\mathfrak{g})$. L'equivalenza è data dalle mutue definizioni

$$l(a) \cdot m = [a, m] \qquad \text{e} \qquad r(a) \cdot m = [m, a].$$

(Per la precisione, in [L-P] le rappresentazioni di $\mathfrak{g}$ sono moduli *destri* su un'algebra $UL(\mathfrak{g})$ che quindi risulta ora leggermente differente dalla nostra.)

5.5.2 - Proposizione. *Sia D una dialgebra e D_L l'algebra di Leibniz con commutatore $[a,b] = a \dashv b - b \vdash a$. Esiste un morfismo di algebre*

$$UL(D_L) \longrightarrow E(D)$$

dato da

$$r(a) \mapsto y(a) - x(a) \quad e \quad l(a) \mapsto u(a) - v(a).$$

Dimostrazione. Le relazioni (ED) sugli elementi x, y, u, v implicano le relazioni (UL) su r, l. Verifichiamo, per esempio, l'uguaglianza 1 di (UL). Siano $a, b \in D$. Allora

$$\begin{aligned} r([a,b]) &= y([a,b]) - x([a,b]) = y(a \dashv b - b \vdash a) - x(a \dashv b - b \vdash a) \\ &= y(b)y(a) - y(a)y(b) - x(a)x(b) + x(b)x(a). \end{aligned}$$

Dall'altro lato,

$$\begin{aligned} -r(a)r(b) + r(b)r(a) &= -[y(a) - x(a)][y(b) - x(b)] + [y(b) - x(b)][y(a) - x(a)] \\ &= -y(a)y(b) + y(a)x(b) + x(a)y(b) - x(a)x(b) \\ &\qquad +y(b)y(a) - y(b)x(a) - x(b)y(a) + x(b)x(a). \end{aligned}$$

Questi due termini sono uguali per via dell'identità 5 di (ED). □

Chapter 6

Corappresentazioni di dialgebre

Le corappresentazioni di una dialgebra sono i moduli destri sulla sua algebra inviluppo universale. Abbiamo già avuto modo di osservare che per le algebre associative la nozione corrispondente coincide con quella dei bimoduli, cioè con la sua duale nozione di rappresentazione. In questo capitolo mostriamo che per le dialgebre innanzitutto non vale l'analoga equivalenza di categorie, ma che si ottiene un'equivalenza fra le categorie di rappresentazione e corappresentazioni simmetiche (o anche antisimmetriche), e che queste categorie coincidono con quella dei bimoduli sull'algebra associativa D_{as}.

6.1 Definizioni e esempi.

6.1.1 - Corappresentazioni. Sia D una dialgebra sul campo k, con algebra inviluppo universale $E(D)$. Una *corappresentazione* di D è, per definizione, un modulo destro N su $E(D)$.

Poniamo, per ogni $n \in N$ e $a \in D$,

$$a \Vdash n := n \cdot x(a) \quad , \quad n \dashV a := n \cdot y(a) \ ,$$

$$a \dashV n := n \cdot u(a) \quad , \quad n \Vdash a := n \cdot v(a) \ .$$

Allora il k-modulo N è munito di quattro azioni di D, due azioni destre $\dashV, \Vdash \colon N \otimes D \longrightarrow N$ e due azioni sinistre $\dashV, \Vdash \colon D \otimes N \longrightarrow N$, soddisfacenti i seguenti 15 assiomi:

$$
(CD)\quad \left\{
\begin{array}{c}
n \dashV (a \dashv b) \overset{1}{=} (n \dashV b) \dashV a \overset{2}{=} n \dashV (a \vdash b) \\[2mm]
(n \dashV a) \Vdash b \overset{3}{=} n \Vdash (b \dashv a) \\[2mm]
(n \Vdash a) \Vdash b \overset{4}{=} n \Vdash (b \vdash a) \overset{5}{=} (n \Vdash a) \dashV b \\[2mm]
(a \dashV n) \dashV b \overset{6}{=} a \dashV (n \dashV b) \overset{7}{=} (a \dashV n) \Vdash b \\[2mm]
(a \Vdash n) \dashV b \overset{8}{=} a \Vdash (n \dashV b) \\[2mm]
a \Vdash (n \Vdash b) \overset{9}{=} (a \Vdash n) \Vdash b \overset{10}{=} a \dashV (n \Vdash b) \\[2mm]
a \dashV (b \dashV n) \overset{11}{=} (b \dashv a) \dashV n \overset{12}{=} a \Vdash (b \dashV n) \\[2mm]
(a \vdash b) \dashV n \overset{13}{=} b \dashV (a \Vdash n) \\[2mm]
(a \vdash b) \Vdash n \overset{14}{=} b \Vdash (a \Vdash n) \overset{15}{=} (a \dashv b) \Vdash n
\end{array}
\right.
$$

per ogni $a, b \in D$ e $n \in N$. Confrontando le relazioni (CD) con le relazioni (RD) del capitolo 3 si nota subito che rappresentazioni e corappresentazioni soddisfano assiomi non compatibili fra loro. In particolare, una dialgebra D *non* è una corappresentazione di se stessa!

Se D ha una bar-unità 1, a corappresentazione N, è chiamata *unitaria* se $1 \Vdash n = n = n \dashV 1$ per ogni $n \in N$.

6.1.2 - Esempi.

1. L'algebra inviluppo universale $E(D)$ è essa stessa, chiaramente, una corappresentazione della dialgebra D, con azioni date in (6.1.1) per $n \in E(D)$. Inoltre, mediante le relazioni (ED), si vede che le azioni di D su $E(D)$ godono delle seguenti ulteriori proprietà:

$$
(CED)\quad \left\{
\begin{array}{rcl}
x(a) \dashV b & \overset{5}{=} & a \Vdash y(b), \\[2mm]
x(a) \Vdash b & \overset{12}{=} & a \Vdash v(b), \\[2mm]
u(a) \dashV b & \overset{14}{=} & a \dashV y(b), \\[2mm]
a \dashV u(b) - a \Vdash u(b) & \overset{7}{=} & 0 \ \overset{15}{=} \ u(b) \dashV a - u(b) \Vdash a, \\[2mm]
a \dashV v(b) - a \Vdash v(b) & \overset{13}{=} & 0 \ \overset{10}{=} \ v(b) \dashV a - v(b) \Vdash a,
\end{array}
\right.
$$

   per ogni $a, b \in D$.

2. Data una dialgebra D su k, ogni k-modulo N può essere munito di una struttura di D-corappresentazione, ponendo $n \star a := 0 =: a \star n$ per ogni $n \in N$ e $a \in D$. (Anche qui $\star$ denota entrambi i simboli $\dashV$ e $\Vdash$.) Chiamiamo N la corappresentazione *triviale* di D. Si noti che quando D ha una bar-unità 1, la corappresentazione triviale non può essere unitaria, a meno che $N = 0$.

3. Sia D una dialgebra e N una corappresentazione di D. Allora, per ogni $r \geq 1$, il k-modulo $\mathrm{M}_r(N)$ delle matrici $r \times r$ con coefficienti in N è una corappresentazione della dialgebra $\mathrm{M}_r(D)$, con ovvie azioni 'riga $\times$ colonna'.

6.1.3 - Corappresentazioni simmetriche e antisimmetriche. Sia D una dialgebra e N una corappresentazione di D. Le relazioni (CD) mostrano che l'identità

$$(n \Vdash a) \dashv\!\!\mid b \overset{4,5}{=} (n \Vdash a) \Vdash b \quad , \quad a \dashv\!\!\mid (n \Vdash b) \overset{9,10}{=} a \Vdash (n \Vdash b),$$
$$(a \dashv\!\!\mid n) \dashv\!\!\mid b \overset{6,7}{=} (a \dashv\!\!\mid n) \Vdash b \quad , \quad a \dashv\!\!\mid (b \dashv\!\!\mid n) \overset{11,12}{=} a \Vdash (b \Vdash n)$$

vale per ogni $n \in N$ e $a, b \in D$. La corappresentazione N è detta *simmetrica* se è un modulo destro sull'algebra inviluppo simmetrica $S(D)$. Ciò è equivalente a richiedere che le azioni di $E(D)$ su N soddisfino le condizioni

$$(SCD) \quad \begin{cases} n \dashv\!\!\mid a - n \Vdash a = 0, \\ a \dashv\!\!\mid n - a \Vdash n = 0. \end{cases}$$

La corappresentazione N è detta *antisimmetrica* se è un modulo destro sull'algebra inviluppo antisimmetrica $A(D)$, cioè se soddisfa

$$(ACD) \quad a \dashv\!\!\mid n = 0 = n \Vdash a.$$

6.1.4 - Esempio. Le relazioni 7, 15, 13, 10 di (CED) implicano che la sottocorappresentazione di $E(D)$ generata da $u(a)$ e $v(a)$, per ogni $a \in D$, è una corappresentazione simmetrica di D.

6.1.5 - Decomposizione in parte simmetrica ed antisimmetrica. Sia D una dialgebra, ed N una corappresentazione di D. Sia $I(D)$ l'ideale di simmetrizzazione di $E(D)$ definito in (5.4.1) e consideriamo il sottomodulo corrispondente

$$NI(D) := \{n \cdot e \in N \mid n \in N, e \in I(D)\}.$$

La corappresentazione quoziente

$$S(N) := N/NI(D)$$

è ovviamente simmetrica, cioè l'azione $S(N) \otimes E(D) \longrightarrow S(N)$ passa al quoziente $S(N) \otimes S(D) \longrightarrow S(N)$, in quanto $S(N) \cdot I(D) = 0$.

Analogamente, sia $J(D)$ l'ideale di antisimmetrizzazione di $E(D)$ definito in (5.4.1) e

$$NJ(D) := \{n \cdot e \in N \mid n \in N, e \in J(D)\}$$

il sottomodulo di N corrispondente. La corappresentazione quoziente

$$A(N) := N/NJ(D)$$

è ovviamente antisimmetrica, in quanto $A(N) \cdot J(D) = 0$.

6.1.6 - Proposizione. *Sia D una dialgebra, ed N una corappresentazione di D. Allora N si decompone in somma diretta di corappresentazioni,*

$$N \cong A(N) \oplus NJ(D),$$

dove $A(N)$ è una corappresentazione antisimmetrica e $NJ(D)$ è simmetrica.

Dimostrazione. Abbiamo osservato in (5.4.4) che $I(D) \cdot J(D) = 0$, quindi il sottomodulo $NJ(D)$ è esso stesso una corappresentazione simmetrica di D. $\square$

6.2 Dualità fra rappresentazioni e corappresentazioni.

Confrontando la definizione di rappresentazioni e corappresentazioni di una dialgebra, si può essere portati a pensare che esse siano 'opposte' l'una all'altra. Per esempio, ci si può chiedere se la dialgebre opposta D^{op} è una corappresentazione di D, o se una corappresentazione di D è una rappresentazione della sua dialgebra opposta D^{op}. La risposta a queste domande è sempre negativa. Allo stesso modo, data una D-representation M e ponendo

$$m \dashV a := a \vdash m \quad , \quad a \dashV m := m \vdash a \ ,$$

$$m \Vdash a := a \dashv m \quad , \quad a \Vdash m := m \dashv a \ ,$$

le relazioni (CD) su $\dashV$ e $\Vdash$ non sono soddisfatte, e quindi non otteniamo una corappresentazione di D. Comunque, è possible definire corappresentazioni da rappresentazioni e viceversa. Mostreremo ora come procedere.

6.2.1 - Da rappresentazioni a corappresentazioni. Sia D una dialgebra. Data una D-rappresentazione M, possiamo definire due D-corappresentazioni sul k-modulo M. La prima, con azioni

$$m \dashV a := a \vdash m =: m \Vdash a,$$

$$a \dashV m := m \dashv a =: a \Vdash m,$$

è per definizione una corappresentazione simmetrica di D, e la seconda, con azioni

$$m \dashV a := a \vdash m \quad , \quad m \Vdash a := 0 \ ,$$

$$a \Vdash m := m \dashv a \quad , \quad a \dashV m := 0 \ ,$$

è per definizione antisimmetrica. Le chiamiamo *corappresentazioni opposte simmetrica e antisimmetrica di M* rispettivamente, e le indichiamo entrambe con M^{op}.

6.2.2 - Da corappresentazioni a rappresentazioni. Viceversa, data una corappresentazione N, definiamo le due seguenti rappresentazioni. Una, con azioni

$$n \dashv a := a \Vdash n =: n \vdash a,$$

$$a \dashv n := n \dashV a =: a \vdash n,$$

è per definizione una rappresentazione simmetrica di D, e l'altra, con azioni

$$n \dashv a := a \Vdash n \quad , \quad n \vdash a := 0 \ ,$$

$$a \vdash n := n \dashV a \quad , \quad a \dashv n := 0 \ ,$$

è per definizione antisimmetrica. Le chiamiamo *rappresentazione opposte simmetrica e antisimmetrica di N* rispettivamente, e le indichiamo entrambe con N^{op}.

6.2.3 - Proposizione. *Sia D una dialgebra. La categoria delle rappresentazioni simmetriche (o antisimmetriche) di D è equivalente alla categoria delle corappresentazioni simmetriche (o antisimmetriche) di D. Tutte queste sono poi equivalenti alla categoria dei bimoduli sull'algebra associativa D_{as}.*

Dimostrazione. Dopo (3.2.4) dobbiamo solo mostrare l'equivalenza per uno di questi funtori. Scegliamo quello dalle rappresentazioni antisimmetriche alle corappresentazioni simmetriche.

Sia $f : M^{op} \longrightarrow M'^{op}$ un morfismo di corappresentazioni, dove M^{op} e M'^{op} sono le opposte di due rappresentazioni. Allora $f : M \longrightarrow M'$ è una mappa k-lineare sui k-moduli sottostanti. Dimostriamo che f è un morfismo di rappresentazioni. Per ogni $m \in M$ e $a \in D$ abbiamo

$$f(m \dashv a) = f(a \Vdash m) = a \Vdash f(m) = f(m) \dashv a,$$

e analogamente otteniamo $f(m \vdash a) = 0 = f(a \dashv m)$ e $f(a \vdash m) = a \vdash f(m)$. Quindi il funtore $M \mapsto M^{op}$ è pieno.

Prendiamo ora due rappresentazioni M e M' tali che le loro corappresentazioni opposte siano isomorfe, $M^{op} \cong M'^{op}$. Chiaramente, esse devono essere isomorfe come k-moduli, $M \cong M'$. Dimostriamo che esse sono isomorfe come D-rappresentazioni. Di nuovo, per ogni $m \in M$ e $a \in D$ abbiamo

$$m \dashv a = a \Vdash m = a \Vdash' m = m \dashv' a$$

e analogamente $m \vdash = 0 = m \vdash' a$, $a \dashv m = 0 = a \dashv' m$, e $a \vdash m = a \vdash' m$. Quindi il funtore $M \mapsto M^{op}$ è anche fedele.

Resta da mostrare che il funtore $N \mapsto N^{op}$ che porta una corappresentazione antisimmetrica di D nella sua rappresentazione antisimmetrica opposta è il suo funtore inverso, e questo segue immediatamente dalle definizioni.

L'ultima asserzione era già stata provata in (3.2.3). □

6.2.4 - Da corappresentazioni a bimoduli. In particolare, data una dialgebra D e una D-corappresentazione simmetrica o antisimmetrica N, indichiamo con N_{as} il suo corrispondente bimodulo su D_{as}. Si può facilmente verificare, applicando l'equivalenza di categorie descritta sopra, che le azioni di D_{as} su N_{as} sono date da

$$n \cdot [a] := a \Vdash n \quad \text{e} \quad [a] \cdot n := n \dashv\!\dashv a,$$

per ogni $n \in N_{as}$ e $[a] \in D_{as}$.

6.3 Corappresentazioni di dialgebre e di Leibniz.

6.3.1 - Corappresentazioni di algebre di Leibniz. Data un'algebra di Leibniz $\mathfrak{g}$, una *corappresentazione* di $\mathfrak{g}$ è un k-modulo M munito di un'azione sinistra ed una destra di $\mathfrak{g}$, entrambe denotate con $[\![\ ,\ ]\!]$, soddisfacenti le seguenti condizioni:

$$(CL)\quad \begin{cases} [\![[\![n, a]\!], b]\!] \overset{1}{=} [\![n, [a, b]]\!] - [\![[\![b, n]\!], a]\!]\,, \\ [\![a, [\![n, b]\!]]\!] \overset{2}{=} [\![[\![a, n]\!], b]\!] - [\![n, [b, a]]\!]\,, \\ [\![[a, b], n]\!] \overset{3}{=} [\![a, [\![b, n]\!]]\!] - [\![b, [\![a, n]\!]]\!], \end{cases}$$

per ogni $n \in N$ e $a, b \in \mathfrak{g}$. Una corappresentazione N è detta *simmetrica* se abbiamo anche

$(SCL)\quad [\![n,a]\!] + [\![a,n]\!] = 0,$

mentre è detta *antisimmetrica* se soddisfa

$(ACL)\quad [\![n,a]\!] = 0.$

6.3.2 - Da corappresentazioni di dialgebra a quelle di Leibniz. Sia D una dialgebra con una corappresentazione N. Sul k-modulo N, poniamo

$$[\![n,a]\!] := a \dashv\!\!\mid n - n \mid\!\!\vdash a \quad \text{e} \quad [\![a,n]\!] := n \dashv\!\!\mid a - a \mid\!\!\vdash n,$$

per ogni $n \in N$ e $a \in D$. Indichiamo questo modulo con N_L.

6.3.3 - Proposizione. *Sia D_L l'algebra di Leibniz di una dialgebra D, con commutatore $[a,b] = a \dashv b - b \vdash a$. Data una D-corappresentazione N, il k-module N_L definito sopra è una corappresentazione dell'algebra di Leibniz D_L.*

Inoltre, se N è una corappresentazione simmetrica di D (risp. antisimmetrica), allora N_L è una corappresentazione simmetrica di D_L (risp. antisimmetrica).

Dimostrazione. Controlliamo, per esempio, l'uguaglianza 3 di (CL), per verificare che questa è la buona definizione per le azioni di D_L su N, nonostante l'ordine inusuale di n e a. Il primo termine è

$$[\![[a,b],n]\!] \quad = \quad n \dashv\!\!\mid (a \dashv b) - n \dashv\!\!\mid (b \vdash a) - (a \dashv b) \mid\!\!\vdash n + (b \vdash a) \mid\!\!\vdash n,$$

e il secondo è

$$\begin{aligned} [\![a,[\![b,n]\!]]\!] - [\![b,[\![a,n]\!]]\!] = \; & (n \dashv\!\!\mid b) \dashv\!\!\mid a - (b \mid\!\!\vdash n) \dashv\!\!\mid a - a \mid\!\!\vdash (n \dashv\!\!\mid b) + a \mid\!\!\vdash (b \mid\!\!\vdash n) \\ & -(n \dashv\!\!\mid a) \dashv\!\!\mid b + (a \mid\!\!\vdash n) \dashv\!\!\mid b + b \mid\!\!\vdash (n \dashv\!\!\mid a) - b \mid\!\!\vdash (a \mid\!\!\vdash n). \end{aligned}$$

Separiamo questi termini rispetto alla posizione di n:

- $n \dashv\!\!\mid (a \dashv b) - n \dashv\!\!\mid (b \vdash a) = (n \dashv\!\!\mid b) \dashv\!\!\mid a - (n \dashv\!\!\mid a) \dashv\!\!\mid b$ per 1, 2 in (CD);
- $0 = -(b \mid\!\!\vdash n) \dashv\!\!\mid a - a \mid\!\!\vdash (n \dashv\!\!\mid b) + (a \mid\!\!\vdash n) \dashv\!\!\mid b + b \mid\!\!\vdash (n \dashv\!\!\mid a)$ per 8 (due volte);
- $-(a \dashv b) \mid\!\!\vdash n + (b \vdash a) \mid\!\!\vdash n = a \mid\!\!\vdash (b \mid\!\!\vdash n) - b \mid\!\!\vdash (a \mid\!\!\vdash n)$ per 14, 15.

□

6.3.4 - Esempio. Sia D una dialgebra, e consideriamo la corappresentazione simmetrica D^{op} sul k-modulo D. Allora D_L^{op} è una corappresentazione di D_L, con azioni

$$[\![a,b]\!] = b \dashv\!\!\mid a - a \mid\!\!\vdash b = a \dashv b - b \vdash a = [a,b]$$

e

$$[\![b,a]\!] = a \dashv\!\!\mid b - b \mid\!\!\vdash a = b \vdash a - a \dashv b = -[a,b]$$

per ogni $a \in D_L^{op}$ e $b \in D_L$. È chiaramente simmetrica.

Chapter 7

Omologia delle dialgebre

In questo capitolo introduciamo l'omologia delle dialgebre come teoria duale della coomologia definita nel capitolo 4.

La principale novità, rispetto all'omologia di Hochschild delle algebre associative, consiste nella diversificazione del complesso bar, descritto nel capitolo 2, dal complesso cosiddetto cotangente, che funge da intermediario fra i complessi di omologia e di coomologia.

7.1 Complesso di catene.

7.1.1 - Catene sulle dialgebre. Sia D una dialgebra su k ed N una corappresentazione di D. Per ogni $n \geq 0$, definiamo il *modulo delle n-catene di D a coefficienti in N* come

$$CY_n(D,N) := k[Y_n] \otimes N \otimes D^{\otimes n},$$

e l'operatore di bordo $d : CY_n(D,N) \longrightarrow CY_{n-1}(D,N)$ come l'applicazione k-lineare $d = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$ data per mezzo delle facce $d_i(y \otimes \underline{a}) = d_i(y) \otimes d_i^y(\underline{a})$, dove le facce d_i su un albero y sono definite in (2.1.2) e per ogni $\underline{a} = (a_0, a_1, ..., a_n) \in N \otimes D^{\otimes n}$ i termini

$$d_i^y(a_0, a_1, ..., a_n) := \begin{cases} (a_1 \circ_0^y a_0, a_2, ..., a_n), & \text{for } i = 0, \\ (a_0, a_1, ..., a_i \circ_i^y a_{i+1}, ..., a_n) & \text{for } i = 1, ..., n-1, \\ (a_0 \circ_n^y a_n, a_1, ..., a_{n-1}), & \text{for } i = n, \end{cases}$$

contengono le operazioni $\circ_i^y$ definite in (2.1.4) e (4.1.1). (Si noti il lato in cui gli elementi a_1 e a_n di D agiscono sull'elemento a_0 di N.) In particolare, ricordiamo che le operazioni $\circ_0^y$ e $\circ_n^y$ sono

$$a_1 \circ_0^y a_0 := \begin{cases} a_1 \dashv a_0, & \text{se } y \text{ ha la forma} \\ a_1 \vdash a_0, & \text{se } y \text{ ha la forma} \end{cases}$$

$$a_0 \circ_n^y a_n := \begin{cases} a_0 \vdash a_n, & \text{se } y \text{ ha la forma} \\ a_0 \dashv a_n, & \text{se } y \text{ ha la forma} \end{cases}$$

Quando $N = D^{op}$ è la corappresentazione simmetrica definita in (6.2.1) sul k-modulo D, il modulo delle n-catene è

$$CY_n(D, D^{op}) = k[Y_n] \otimes D^{\otimes n+1},$$

e le facce d_0 e d_n assumono la semplice forma

$$d_0(y \otimes (a_0, a_1, ..., a_n)) = d_0(y) \otimes (a_0 \dashv a_1, a_2, ..., a_n),$$

$$d_n(y \otimes (a_0, a_1, ..., a_n)) = d_n(y) \otimes (a_n \vdash a_0, a_1, ..., a_{n-1}),$$

per ogni n-albero y e $(a_0, a_1, ..., a_n) \in D^{\otimes n+1}$.

7.1.2 - Lemma. *L'operatore di bordo definito sopra soddisfa l'idenità* $d \circ d = 0$*, quindi* $(CY_*(D, N), d)$ *è un complesso di catene.*

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che le facce definite sopra soddisfano le relazioni $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ per ogni $0 \leq i < j \leq n$. Per $i = 1, ..., n-1$, le facce coincidono con le mappe definite in (2.1.4). Perciò è sufficiente mostrare le relazioni per $i = 0$, $j = 1, ..., n$ e $j = n$, $i = 0, ..., n-1$. Questo segue dal fatto, dimostrato nel prossimo lemma, che i moduli di catene $CY_n(D, N)$ sono isomorfi agli spazi duali dei moduli di cocatene $CY^n(D, M)$ per ogni D-representation M, nella categoria di moduli su $E(D)$, e che le d_i e δ^i corrispondono l'un l'altra in questo isomorfismo. Allora le relazioni seguono evidentemente dalle relazioni duali fra le facce δ^i. □

7.2 Complesso cotangente, dualità fra i complessi di catene e di cocatene.

7.2.1 - Complesso cotangente di una dialgebra. Data una dialgebra D, chiamiammo *modulo delle n-catene cotangenti di D* il modulo delle n-catene di D a coefficienti nella D-corappresentazione data dall'algebra inviluppo universale $E(D)$ di D,

$$EY_n(D) := CY_n(D, E(D)) = k[Y_n] \otimes E(D) \otimes D^{\otimes n}.$$

(Si veda [Q] per il complesso cotangente nel contesto delle algebre commutative.) La prima e l'ultima faccia, in questo caso, assumono la seguente forma:

$$d_0(y \otimes (e, a_1, ..., a_n)) = d_0(y) \otimes \begin{cases} (e \cdot u(a_1), a_2, ..., a_n), & \text{se } y \text{ ha la forma} \\ (e \cdot x(a_1), a_2, ..., a_n), & \text{se } y \text{ ha la forma} \end{cases}$$

e analogamente

$$d_n(y \otimes (e, a_1, ..., a_n)) = d_n(y) \otimes \begin{cases} (e \cdot v(a_n), a_0, ..., a_{n-1}), & \text{se } y \text{ ha la forma} \\ (e \cdot y(a_n), a_0, ..., a_{n-1}), & \text{se } y \text{ ha la forma} \end{cases}$$

per ogni n-albero y, ogni elemento $e \in E(D)$ e $a_i \in D$ per $i = 1, ..., n$. In particolare, il primo operatore di bordo $d : E(D) \otimes D \longrightarrow E(D)$ è espliciatamente definito come

$$d(e \otimes a) = e \cdot (u(a) - v(a)),$$

per ogni $e \in E(D)$ e $a \in D$.

7.2.2 - Lemma. *Sia D una dialgebra su k, con algebra inviluppo universale $E(D)$ ed una rappresentazione M. Allora l'isomorfismo dei moduli di cocatene*

$$CY^n(D,M) \cong Hom_{E(D)}(EY_n(D),M)$$

commuta col cobordo δ definito su $CY^*(D,M)$ e col bordo d^* indotto su $Hom_{E(D)}(EY_*(D),M)$ dall'operatore di bordo d definito su $EY_*(D)$. Perciò $(EY_*(D),d)$ è un complesso di catene.

Inoltre per ogni corappresentazione N di D l'isomorfismo di moduli di catene

$$CY_*(D,N) \cong N \otimes_{E(D)} EY_*(D)$$

commuta con i bordi. Quindi anche $(CY_*(D,N),d)$ è un complesso di catene.

Dimostrazione. Per ogni $n \geq 0$, il modulo di n-catene cotangenti $EY_n(D) = k[Y_n] \otimes E(D) \otimes D^{\otimes n}$ è un sinistro modulo su $E(D)$, con azione data dalla moltiplicazione nell'algebra $E(D)$. Pertanto, nello spazio duale $Hom_{E(D)}(EY_n(D),M)$ dei morfismi di $E(D)$-moduli sinistri da $EY_n(D)$ ad una D-rappresentazione M, è sufficiente considerare il valore di ogni mappa f sull'unità 1_E di $E(D)$, poiché

$$f(y \otimes e \otimes \underline{a}) = e \cdot f(y \otimes 1_E \otimes \underline{a})$$

per ogni $e \in E(D)$. Questo chiarisce anche l'isomorfismo canonico di moduli di n-cocatene

$$CY^n(D,M) = \mathrm{Hom}_k(k[Y_n] \otimes D^{\otimes n}, M) \cong Hom_{E(D)}(EY_n(D),M),$$

che associa ad una mappa k-lineare $f : k[Y_n] \otimes D^{\otimes n} \longrightarrow M$ la sua estensione $E(D)$-lineare

$$\tilde{f}(y \otimes e \otimes \underline{a}) := e \cdot f(y \otimes \underline{a})$$

per ogni $e \in E(D)$, e viceversa associa ad una mappa $E(D)$-lineare $g : k[Y_n] \otimes E(D) \otimes D^{\otimes n} \longrightarrow M$ la sua restrizione ad $\{1_E\} \subset E(D)$,

$$\tilde{g}(y \otimes \underline{a}) := g(y \otimes 1_E \otimes \underline{a}).$$

Per definizione, la mappa duale $d_i^* : Hom_{E(D)}(EY_{n-1}(D),M) \longrightarrow Hom_{E(D)}(EY_n(D),M)$ della faccia d_i definita sopra è data da

$$(d_i^* f)(y \otimes 1_E \otimes \underline{a}) := f(d_i(y \otimes 1_E \otimes \underline{a}))$$

per ogni $i = 0, ..., n$. Perciò lee facce d_i su $EY_*(D)$ soddisfano le relazioni $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ per ogni $i < j$, e $(EY_*(D),d)$ è un complesso di catene.

La seconda parte segue facilmente dall'evidente isomorfismo di complessi di catene

$$CY_*(D,N) = k[Y_n] \otimes N \otimes D^{\otimes n} \cong k[Y_n] \otimes N \otimes_{E(D)} E(D) \otimes D^{\otimes n}.$$

□

7.3 Omologia delle dialgebre.

7.3.1 - Omologia delle dialgebre. Sia D una dialgebra, e N una corappresentazione di D. Chiamiamo *omologia della dialgebra D a coefficienti in N* l'omologia del complesso di catene definito in (7.1.1),

$$HY_n(D,N) := H_n(CY_*(D,N),d)$$

per ogni $n \geq 0$. Quando $N = D^{op}$ è la corappresentazione simmetrica definita in (6.2.1) sul k-modulo D, indichiamo con

$$HHY_*(D) := HY_*(D, D^{op})$$

l'omologia della dialgebra D a coefficienti in se stessa. Quando A è una algebra associativa, e M è un'A-bimodulo, indichiamo semplicemente con

$$HY_*(A, M) := HY_*(A_{di}, M^{op})$$

l'omologia di A considerata come una dialgebra, dove M^{op} è la corappresentazione simmetrica su M.

7.3.2 - Esempio. Consideriamo D-corappresentazione costante $N = k$ (6.1.2-2). Poiché $\lambda \dashv\!\dashv a = \lambda \Vdash a = a \dashv\!\dashv \lambda = a \Vdash \lambda = 0$ per ogni $\lambda \in k$ e $a \in D$, le facce d_0 e d_n si annullano sul modulo delle n-catene di D a coefficienti in k. Cosi l'operatore di bordo d definito sopra coincide con il bordo d' definito in (7.1.1), e ritroviamo la bar omologia di D,

$$HY_n(D, k) = HY_n(D)$$

per ogni $n \geq 1$. Inoltre, chiaramente, $HY_0(D, k) \cong k$.

7.3.3 - Calcoli elementari. Data una dialgebra D con una corappresentazione N, il primo operatore di bordo di D in N è l'applicazione k-lineare $d : N \otimes D \longrightarrow N$ definita come $d(n, a) := a \dashv\!\dashv n - n \Vdash a$, per ogni $n \in N$ e $a \in D$. Perciò $HY_0(D, M)$ è il modulo degli elementi coinvarianti di N rispetto all'algebra di Leibniz D_L,

$$HY_0(D, N) = N/[\![N, D]\!],$$

dove $[\![N, D]\!] := \{ [\![n, a]\!] = a \dashv\!\dashv n - n \Vdash a \mid n \in N, a \in D\}$. Quando $N = D^{op}$, per definizione delle azioni di D su D^{op} data in (6.2.1) ritroviamo il commutatore di Leibniz:

$$d(a, b) = b \dashv\!\dashv a - a \Vdash b = a \dashv b - b \vdash a = [a, b]$$

per ogni $a, b \in D$. Quindi $[\![D^{op}, D]\!] = [D, D]$ e

$$HHY_0(D) = D/[D, D].$$

Quando $D = N = k$ è il campo, il complesso di dialgebra coincide col complesso degli alberi, e si mostra facilmente che è aciclico.

7.3.4 - Lemma. *Il complesso degli alberi binari $(k[Y_*], d)$ è aciclico.*

Dimostrazione. Definiamo un'applicazione k-lineare $h : k[Y_n] \longrightarrow k[Y_{n+1}]$ ponendo

$$h(y) := \curlyvee^{y}.$$

È immediato verificare che $d_0 h = id$ e $d_i h = h d_{i-1}$, per $i = 1, ..., n + 1$, quindi h è un'omotopia contraente per il complesso di catene degli alberi. $\square$

7.4 Confronto fra i complessi bar e cotangente.

La necessità di dare un nome al complesso di dialgebra a coefficienti nell'algebra inviluppo universale non si manifesta nel contesto delle algebre associative. Il complesso cotangente di un'algebra associativa A, come algebra, è il complesso di Hochschild di A a coefficienti nell'algebra inviluppo universale A^e. Per le algebre unitarie, esiste un isomorfismo canonico di moduli di catene

$$\begin{array}{ccc} C_n(A, A^e) = A^e \otimes A^{\otimes n} & \longrightarrow & C_{n+2}(A, k) = A^{\otimes n+2} \\ (x \otimes y) \otimes \underline{a} & \mapsto & x \otimes \underline{a} \otimes y, \end{array}$$

fra il complesso bar e quello cotangente di A, che commuta con il bordo di Hochschild, e induce un isomorfismo canonico sull'omologia, $H_n(A, A^e) \cong H_{n+2}(A, k)$ per ogni $n > 0$. Questo isomorfismo è di fondamentale importanza: poiché il complesso bar di un'algebra unitaria è aciclico, ne consegue che il complesso cotangente è una risoluzione libera di A come modulo sinistro su A^{op}. Questo mostra immediatamente che l'omologia di Hochschild è un funtore derivato sulle algebre unitarie.

Nel contesto delle dialgebre, i complessi bar e cotangente non sono isomorfi, nemmeno quando restringiamo la nostra attenzione alle algebre associative o alle dialbegre bar-unitarie. In generale, esiste solo una trasformazione canonica dal complesso bar a quello cotangente, che è una suriezione per $n \geq 1$.

7.4.1 - Trasformazione dal complesso bar a quello cotangente. Sia D una dialgebra con algebra inviluppo universale $E(D)$. Per ogni $n \geq 0$, definiamo un'applicazione k-lineare

$$\psi : CY_{n+2}(D) = k[Y_{n+2}] \otimes D^{\otimes n+2} \longrightarrow EY_n(D) = k[Y_n] \otimes E(D) \otimes D^{\otimes n}$$

con

$$\psi(y \otimes (a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1})) := d_0 d_{n+2}(y) \otimes \psi_0^y(a_0) \cdot \psi_{n+2}^y(a_{n+1}) \otimes (a_1, ..., a_n),$$

dove

$$\psi_0^y(a) := \begin{cases} x(a), & \text{se } y \text{ ha la forma } \curlyvee \\ u(a), & \text{se } y \text{ ha la forma } \curlyvee \end{cases}$$

e

$$\psi_{n+2}^y(a) := \begin{cases} y(a), & \text{se } y \text{ ha la forma } \curlyvee \\ v(a), & \text{se } y \text{ ha la forma } \curlyvee \end{cases}$$

7.4.2 - Lemma. *La mappa di moduli di catene* $\psi : CY_{n+2}(D) \longrightarrow EY_n(D)$ *definita sopra commuta con gli operatori di bordo bar e cotangente* d' *e* d, *e induce una trasformazione di complessi* $\psi_* : CY_{*+2}(D) \longrightarrow EY_*(D)$.

Dimostrazione. Esplicitamente, la mappa ψ per $n = 0$ e $n = 1$ è:

$$\begin{array}{rccc} \psi : & CY_2(D, k) & \longrightarrow & CY_0(D, E(D)) \\ & \curlyvee \otimes (a, b) & \mapsto & x(a)v(b) = v(b)u(a) \\ & \curlyvee \otimes (a, b) & \mapsto & u(a)y(b) = u(a)v(b) \end{array}$$

e

$$\psi : \quad CY_3(D,k) \longrightarrow CY_1(D, E(D))$$

 $\otimes (a,b,c)$
 $\otimes (a,b,c)$ $\mapsto x(a)v(c) \otimes b = v(c)u(a) \otimes b$

 $\otimes (a,b,c) \mapsto x(a)y(c) \otimes b$

 $\otimes (a,b,c)$
 $\otimes (a,b,c)$ $\mapsto u(a)y(b) \otimes b = u(a)v(b) \otimes b$

È facile allora verificare direttamente l'identità $\psi d = d'\psi$ per $n = 1$. Per $n > 1$ l'identità si verifica in maniera del tutto analoga riportandosi sempre al caso $n = 1$, in quanto l'applicazione ψ coinvolge solo le prime e le ultime due foglie di ogni albero. □

7.4.3 - Aumentazione per il complesso cotangente. Sia D una dialgebra con inviluppo algebra $E(D)$. Se D ha una bar-unitàà 1, possiamo definire un'applicazione $\pi : E(D) \longrightarrow D$ di moduli sinistri su $E(D)$, come l'estensione $E(D)$-linear della map che manda l'unità di $E(D)$ nella bar-unità di D,

$$\pi(e) := e \cdot 1,$$

dove, per ogni $e \in E(D)$, $e \cdot a$ indica l'azione sinistra su $a \in D$. Si noti che questa mappa è l'analoga della moltiplicazione $A^e \cong A \otimes A \longrightarrow A$, $(a,b) \mapsto ab$ che è un'aumentazione per il complesso cotangente di un'algebra associativa.

7.4.4 - Lemma. *Sia D una dialgebra con bar-unità e sia $d : E(D) \otimes D \longrightarrow E(D)$ il primo operatore di bordo del complesso cotangente. Allora $d \circ \pi = 0$, quindi la mappa $\pi : E(D) \longrightarrow D$ è una aumentazione per il complesso cotangente.*

Inoltre, se $d' : k[Y_2] \otimes D^{\otimes 2} \longrightarrow D$ è l'operatore di bordo per il complesso bar, abbiamo una fattorizzazione canonica

$$d' = \pi\psi.$$

Dimostrazione. Esplicitamente, la mappa π agisce sui generatori dell'algebra filtrata $E(D)$ nel modo seguente:

$$\pi(x(a)) = a \vdash 1 \quad , \quad \pi(u(a)) = a \dashv 1 = a$$

$$\pi(y(a)) = 1 \dashv a \ , \ \pi(v(a)) = 1 \vdash a = a$$

per ogni $a \in D$. Poiché $d : E(D) \otimes D \longrightarrow E(D)$ è definito da $d(e \otimes a) = e \cdot (u(a) - v(a))$ per ogni $e \in E(D)$ e $a \in D$, ovviamente abbiamo

$$\pi \circ d(e \otimes a) = \pi(e \cdot (u(a) - v(a))) = e \cdot \pi(u(a) - v(a)) = 0.$$

La fattorizzazione segue immediatamente dalla definizione dell'operatore di bordo d'. □

7.5 Interpretazione Tor sulle corappresentazioni simmetriche.

Quando A è un'algebra associativa unitaria, è noto che l'omologia e la coomologia di Hochschild possono essere interpretati come funtori derivati, infatti ci sono degli isomorfismi

$$H_n(A, M) \cong \mathrm{Tor}_n^{A^e}(A, M) \quad \text{e} \quad H^n(A, M) \cong \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, M),$$

per ogni A-bimodulo M. Questo risultato può essere esteso alle dialgebre, in primo luogo quando sono munite di una bar-unità e si considerano solo le corappresentazioni, o rappresentazioni, simmetriche. In questo caso, infatti, l'omotopia contrattile del complesso bar viene trasportata sul complesso cotangente dalla mappa ψ definita in (7.4.1), mostrando che quest'ultimo è una risoluzione libera.

7.5.1 - Teorema. *Sia D una dialgebra bar-unitaria e sia $D_{as} = D/Z(D)$ la sua algebra associativa unitaria canonica. Allora c'è un isomorfismo*

$$HY_n(D, N) \cong \mathrm{Tor}_n^{E(D)}(N, D_{as})$$

per ogni corappresentazione simmetrica N. Dualmente, c'è un isomorfismo

$$HY^n(D, M) \cong \mathrm{Ext}^n_{E(D)}(D_{as}, M),$$

per ogni rappresentazione simmetrica M.

Dimostrazione. Consideriamo il complesso di catene della dialgebra D a coefficienti nell'algebra inviluppo simmetrica $S(D)$, $CY_n(D, S(D)) = k[Y_n] \otimes S(D) \otimes D^{\otimes n}$. Se N è una corappresentazione simmetrica di D, abbiamo un isomorfismo $N \otimes_{E(D)} S(D) \cong N$, che induce un isomorfismo di complessi

$$CY_*(D, N) \cong N \otimes_{E(D)} CY_*(D, S(D)).$$

Poiché $S(D) = E(D)/I(D)$ è proiettiva su $E(D)$, i moduli di catene $CY_n(D, S(D))$ sono anch'essi proiettivi su $E(D)$. Quindi, per provare che vale l'interpretazione Tor per l'omologia di dialgebra, dobbiamo solo mostrare che $CY_*(D, S(D))$ è una risoluzione di D_{as}, e questo viene fatto nel prossimo lemma. La seconda asserzione segue immediatamente dalla dualità fra omologia e coomologia. □

7.5.2 - Lemma. *Sia D una dialgebra, e $S(D) = E(D)/I(D)$ la sua algebra inviluppo simmetrica. Se D ha una bar-unità, allora*

$$HY_n(D, S(D)) = 0$$

per ogni $n \geq 1$, e $HY_0(D, S(D)) \cong D_{as}$.

Dimostrazione. 1. Definiamo un'applicazione k-lineare $h : k[Y_n] \otimes S(D) \otimes D^{\otimes n} \longrightarrow k[Y_{n+1}] \otimes S(D) \otimes D^{\otimes n+1}$ ponendo

$$h(y \otimes x(a_0)y(a_{n+1}) \otimes (a_1, ..., a_n) := s_0(y) \otimes y(a_{n+1}) \otimes (a_0, a_1, ..., a_n).$$

Si noti che gli elementi di $S(D)$ sono anche della forma 1, $x(a_0)$ e $y(a_{n+1})$. Abbiamo bisogno della bar-unità nella dialgebra D per poter definire l'applicazione h anche su elementi del tipo 1 e $y(a_{n+1})$. In questi casi, infatti, poiché $x(1) = 1$, poniamo $h(y \otimes 1 \otimes \underline{a}) = s_0(y) \otimes 1 \otimes (1, \underline{a})$ e

$h(y \otimes y(a_{n+1}) \otimes \underline{a}) = s_0(y) \otimes y(a_{n+1}) \otimes (1, \underline{a})$. Mostriamo che h è un'omotopia contrattile per il complesso $CY_*(D, S(D))$, cioè che $dh + hd = id$. Infatti,

$$d_0 h(y \otimes x(a_0) y(a_{n+1}) \otimes \underline{a}) = d_0 s_0(y) \otimes y(a_{n+1}) x(a_0) \otimes \underline{a}.$$

Così $d_0 h = id$ perché $d_0 s_0 = id$ e per via delle relazioni di commutatione di x e y (uguaglianza 5 in (ED)). Per ogni $i = 0, ..., n$, abbiamo

$$\begin{aligned} d_{i+1} h(y \otimes x(a_0) y(a_{n+1}) \otimes \underline{a}) &= d_{i+1} s_0(y) \otimes y(a_{n+1}) \otimes (a_0, ..., a_i \circ_{i+1}^{s_0(y)} a_{i+1}, ..., a_n) \\ &= s_0 d_i(y) \otimes y(a_{n+1}) \otimes (a_0, ..., a_i \circ_i^{y} a_i, ..., a_n) \\ &= h d_i(y \otimes x(a_0) y(a_{n+1}) \otimes \underline{a}), \end{aligned}$$

perché $\circ_{i+1}^{s_0(y)} = \circ_i^{y}$. Quindi $d_{i+1} h = h d_i$ per ogni $i = 0, ..., n$.

2. Poiché il primo bordo $d : S(D) \otimes D \longrightarrow S(D)$ è ancora dato da $d(e \otimes a) = e \cdot (u(a) - v(a))$, chiaramente $HY_0(D, S(D)) \cong S(D)/\langle u - v \rangle$. Consideriamo l'applicazione k-lineare $D \longrightarrow HY_0(D, S(D)), a \mapsto x(a)$. È chiaramente una suriezione, perché, per definizione di $S(D)$, in $HY_0(D, S(D))$ abbiamo le identificazioni $x(a) = u(a) = v(a) = y(a)$ per ogni $a \in D$. Non è una iniezione, ed il suo nucleo è dato dall'insieme $\{a \in D \mid x(a) = 0\}$. Questo è isomorfo all'ideale di D generato dall'insieme $\{a \dashv b - a \vdash b \mid a, b \in D\}$, che è $Z(D)$. Quindi $HY_0(D, S(D)) \cong D/Z(D) = D_{as}$. □

In particolare, ci sono due corappresentazioni simmetriche di rilevante interesse. La prima è data dai bimoduli sulle algebre associative.

7.5.3 - Corollario. *Per ogni algebra associativa ed unitaria A, ed ogni A-bimodulo M, ci sono due isomorfismi*

$$HY_*(A, M) \cong \mathrm{Tor}_*^{E(A)}(M, A) \qquad e \qquad HY^*(A, M) \cong \mathrm{Ext}^*_{E(A)}(A, M),$$

La seconda è la dialgebra stessa considerata come modulo dei coefficienti.

7.5.4 - Corollario. *Sia D una dialgebra bar-unitaria, e sia D^{op} la corappresentazione simmetrica. Allora valgono gli isomorfismi*

$$HHY_*(D) \cong \mathrm{Tor}_*^{E(D)}(D^{op}, D_{as}) \qquad and \qquad HHY^*(D) \cong \mathrm{Ext}^*_{E(D)}(D_{as}, D),$$

7.6 Complesso cotangente graduato.

7.6.1 - Filtrazione sul complesso cotangente. Sia D una dialgebra, con algebra inviluppo universale $E(D)$. La filtrazione $F_k E(D)$ su $E(D)$ definita in (5.2.1) induce una filtrazione sul complesso cotangente $EY_*(D)$, data dalla famiglia di sotto-complessi $F_k EY_*(D)$, per ogni $k \geq 0$, con moduli di catene

$$F_k EY_n(D) := k[Y_n] \otimes F_{k-n} E(D) \otimes D^{\otimes n}.$$

Si noti, infatti, che l'operatore di bordo su $EY_*(D)$ rispetta la filtrazione, poiché

$$dF_k EY_n(D) \subset k[Y_{n-1}] \otimes F_{(k-n)+1} E(D) \otimes D^{\otimes n-1} = F_k EY_{n-1}(D),$$

perché le facce d_0 e d_n aumentano la lunghezza degli elementi di $E(D)$. Questi complessi hanno le seguenti proprietà:

$$F_kEY_*(D) \subset F_{k+1}EY_*(D) \text{ for ogni } k \geq 0,$$

$$\bigcup_{k\geq 0} F_kEY_*(D) = EY_*(D),$$

$$F_0EY_n(D) = \begin{cases} k & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n \geq 1. \end{cases}$$

Indichiamo con $GrEY_*(D) = \bigoplus_{k\geq 0} Gr^kEY_*(D)$ il complesso graduato associato, dove $Gr^0EY_*(D) = F_0EY_*(D)$ e $Gr^kEY_*(D) = F_kEY_*(D)/F_{k-1}EY_*(D)$ per $k \geq 1$.

7.6.2 - Proposizione. *Indichiamo con V lo spazio vettoriale sottostante la dialgebra D. Consideriamo V una dialgebra abeliana, con prodotti $a \star b := 0$ per ogni $a, b \in V$. Allora c'è un isomorfismo*

$$GrEY_*(D) \cong EY_*(V)$$

di algebre associative unitarie. (Si confronti con (5.2.3).)

Dimostrazione. Innanzitutto descriviamo l'isomorfismo di k-moduli $GrEY_n(D) \cong EY_n(V)$, per ogni $n \geq 0$. Per definizione si ha

$$\begin{aligned} GrEY_n(D) &= \textstyle\bigoplus_{k\geq 0}[F_kEY_n(D)/F_{k-1}EY_n(D)] \\ &\cong \textstyle\bigoplus_{k\geq 0} k[Y_n] \otimes [F_{k-n}E(D)/F_{k-1-n}E(D)] \otimes D^{\otimes n} k[Y_n] \otimes [\bigoplus_{k\geq 0} Gr^{k-n}E(D)] \otimes D^{\otimes n} \\ &\cong k[Y_n] \otimes E(V) \otimes V^{\otimes n} \end{aligned}$$

per via di (5.2.3) e dell'isomorfismo di k-moduli $D \cong V$.

Ora guardiamo gli operatori di bordo definiti sui due complessi. Le facce d_i su $GrEY_n(D)$ danno zero per $i = 1, ..., n-1$. Infatti, ogni elemento $y \otimes e \otimes \underline{a} \in GrEY_n(D)$ appartiene a qualche componente $Gr^kEY_n(D)$, ed in particolare e è un elemento di $F_{k-n}E(D)$. Allora per $i = 1, ..., n-1$ l'elemento $d_i(y \otimes e \otimes \underline{a}) = d_i(y) \otimes e \otimes (a_1, ..., a_i \circ_i^y a_{i+1}, ..., a_n)$ appartiene a $Gr^kEY_{n-1}(D) = F_kEY_{n-1}(D)/F_{k-1}EY_{n-1}(D)$. Ciò significa che l'elemento e ora viene visto nel quoziente $F_{k-n+1}E(D)/F_{k-n}E(D)$ e perciò è zero.

Infine, le facce d_0 e d_n su $GrEY_n(D)$ non coinvolgonp la struttura di dialgebra di D, ma solo il prodotto nell'algebra $GrE(D)$, che è lo stesso di $E(V)$. □

7.7 Relazione con l'omologia di Hochschild.

7.7.1 - Dall'omologia di dialgebra a quella di Hochschild. Data una dialgebra D ed una D-corappresentazione N, la composizione di mappe lineari

$$CY_n(D, N) = k[Y_n] \otimes N \otimes D^{\otimes n} \longrightarrow k[Y_n] \otimes N_{as} \otimes D_{as}^{\otimes n} \longrightarrow N_{as} \otimes D_{as}^{\otimes n},$$

dove la prima mappa è indotta dalla proiezione canonica $D \longrightarrow D_{as}$, $N \longrightarrow N_{as}$ e la seconda tralascia gli alberi, commuta con i bordi di dialgebra e di Hochschild. Quindi abbiamo una trasformazione canonica dall'omologia della dialgebra D all'omologia di Hochschild di D_{as},

$$HY_n(D, N) \longrightarrow H_n(D_{as}, N_{as})$$

per ogni $n \geq 0$.

In generale, questa mappa non è un isomorfismo. Un contro-esempio tipico è dato da una dialgebra abeliana D. In questo caso l'ideale $Z(D) = \langle a \dashv b - a \vdash b \rangle$ è zero, perciò $D_{as} \cong D$ è un isomorfismo di k-moduli. Allora, per esempio quando $N = k$ è il modulo triviale, si ha $HY_n(D) \cong k[Y_n] \otimes D^{\otimes n}$, come speiegato in (2.2.2), ma $H_n(D_{as}) \cong D^{\otimes n}$, per ogni $n \geq 1$. Quindi per una dialgebra abeliana si ha

$$HY_n(D) \cong k[Y_n] \otimes H_n(D_{as}).$$

Ci sono casi, invece, in cui l'omologia di dialgebra e quella di Hochschild coincidono. Quando D è una dialgebra bar-unitaria, per esempio, e $N = k$ è di nuovo il modulo triviale, si è visto in (2.3.1) che $HY_*(D) = 0$, proprio come per l'algebra associativa unitaria D_{as} si ha $H_*(D_{as}) = 0$.

7.7.2 - Omologia di dialgebra delle algebre associative. Data un'algebra associativa A, e un'A-bimodulo M, la trasformazione canonica sull'omologia

$$HY_n(A, M) \longrightarrow H_n(A, M)$$

è sempre un isomorfismo per $n = 0, 1$, perché sono isomorfi i moduli di catene

$$CY_0(A, M) = k[Y_0] \otimes M \cong M = C_0(A, M),$$

$$CY_1(A, M) = k[Y_1] \otimes M \otimes A \cong M \otimes A = C_1(A, M),$$

e si ha una suriezione

$$CY_2(A, M) = k[Y_2] \otimes M \otimes A^{\otimes 2} \longrightarrow M \otimes A^{\otimes 2} = C_2(A, M).$$

In generale, questo isomorfismo non può essere esteso agli ordini superiori. Il contro-esempio è ancora dato da un'algebra abeliana A, per cui vale $HY_n(A) \cong k[Y_n] \otimes H_n(A)$. Anticipiamo il teorema che viene dimostrato nei capitoli successivi.

7.7.3 - Teorema. *Sia A un'algebra associativa, ed M un A-bimodulo. Se A è H-unitaria, esiste un isomorfismo fra l'omologia di dialgebra e l'omologia di Hochschild,*

$$HY_n(A, M) \cong H_n(A, M)$$

per ogni $n \geq 0$. In particolare, ciò vale per le algebre unitarie.

La dimostrazione è data nel capitolo 8 per le algebre unitarie e nel capitolo 12 per le algebre H-unitarie. Le tecniche usate per la dimostrazione sono completamente diverse in questi due casi.

Per le algebre unitarie si sfrutta la struttura simpliciale del complesso di omologia, e quindi, sostanzialmente, il teorema di Eilenberg-Zilber sull'omologia del prodotto di due complessi.

Per le algebre H-unitarie, invece, il teorema non era decisamente prevedibile prima dell'accurato studio delle proprietà combinatoriche degli alberi binari a cui è dedicato il capitolo 11, e della sequenza spettrale che ne deriva.

Chapter 8

Omologia delle dialgebre bar-unitarie, struttura pseudo-simpliciale

Il complesso di catene di una dialgebra, e tutti i suoi casi particolari (complessi di alberi binari, complesso bar e complesso cotangente) hanno un operatore di bordo definito per mezzo di mappe di faccia. Perciò i moduli di catene possiedono una struttura sottostante di moduli simpliciali.

Nel capitolo 2 abbiamo dimostrato che l'omologia bar di un'algebra bar-unitaria è sempre zero (2.3.1). Dalla dimostrazione è chiaro che la bar-unità per dialgebre svolge il medesimo ruolo dell'unità per algebre associative. In questa sezione ci proponiamo di investigare questo preciso ruolo, e le sue conseguenze sull'omologia.

Per le algebre associative, l'esistenza di una unità rende il complesso di catene di Hochschild un modulo simpliciale, poiché le mappe di degenerazione sono definite per mezzo di una unità. Per le dialgebre, la bar-unità ci permette di definire mappe similari. Si scopre che i moduli di catene delle dialgebre non sono simpliciali, ma le proprietà delle mappe di degenerazione sono sufficienti per dimostrare importanti teoremi come l'invarianza di Morita dell'omologia delle dialgebre per matrici, e l'isomorfismo fra omologia delle dialgebre e di Hochschild per algebre associative unitarie.

8.0.4 - Moduli pseudo-simpliciali. Ricordiamo che un modulo *pre-simpliciale* M è una collezione di k-moduli M_n, uno per ogni numero naturale n, muniti di operatori di faccia $d_i : M_n \longrightarrow M_{n-1}$, per ogni $i = 0, ..., n$, soddisfacenti le relazioni

$$(d) \quad d_i d_j = d_{j-1} d_i \quad , \quad i < j$$

che sono già state citate in (2.1.3). Come abbiamo visto, le mappe di faccia permettono di definire l'operatore di bordo $d = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$ tale che $d \circ d = 0$. Perciò un modulo pre-simpliciale (M_n, d_i) dà sempre origine ad un complesso di catene (M_*, d).

Ricordiamo anche che un modulo *simpliciale* possiede mappe di degenerazione $s_j : M_n \longrightarrow$

M_{n+1}, per ogni $j = 0, ..., n$, che soddisfano le relazioni

$$(ds) \quad d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i, & i < j \\ id, & i = j, j+1 \\ s_j d_{i-1}, & i > j+1 \end{cases}$$

$$(s) \qquad s_i s_j = \; s_{j+1} s_i \quad , \quad i \leq j.$$

Per definizione, i *moduli pseudo-simpliciali* (o *ps-moduli* in breve) sono famiglie di k-moduli dotati di facce e degenerazioni che soddisfano le relazioni (d) e (ds) ma non necessariamente le relazioni (s). (Informazioni sui moduli pseudo-simpliciali possono essere trovate in [T-V] e [I].)

Chiamiamo anche *quasi-simpliciale* un modulo pseudo-simpliciale le cui degenerazioni soddisfano le relazioni (s) eccetto per $i = j$, il che significa che $s_i s_j = \; s_{j+1} s_i$ per ogni $i < j$ e in generale (ma non necessariamente) $s_i s_i \neq \; s_{i+1} s_i$.

Chiaramente, tutti i moduli simpliciali o quasi-simpliciali sono pseudo-simpliciali.

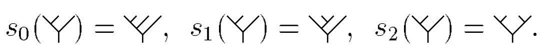
8.1 Degenerazioni sui moduli di catene.

Naturalmente, descriviamo l'esempio che ha stimolato il nostro interesse per i moduli pseudo-simpliciali: il complesso di catene di una dialgebra.

8.1.1 - Degenerazioni sugli alberi. Per ogni $n \geq 0$ e ogni $j = 0, ..., n$, definiamo le mappe di degenerazione

$$s_j : Y_n \longrightarrow Y_{n+1}$$

come quelle che *biforcano* la j-esima foglia degli n-alberi, cioè che rimpiazzano la j-esima foglia $|$ con il ramo $\curlyvee$. Per esempio:



8.1.2 - Lemma. *Le mappe di degenerazione soddisfano le relazioni* (ds). *Soddisfano anche le* (s) *per* $i < j$, *quindi il modulo di alberi binari* $(k[Y_n], d_i, s_j)$ *è quasi-simpliciale.*

Dimostrazione. (ds) L'operazione $d_i s_j$ su un albero y dapprima aggiunge una foglia rimpiazzando la foglia numero j con il ramo $\curlyvee$, e quindi elimina la foglia numero i. Perciò, quando $i < j$, è chiaro che otteniamo lo stesso albero se prima cancelliamo la i-esima foglia e in seguito biforchiamo la j-esima foglia originale, che ora è numerata $j - 1$.
Quando $i = j$ o $j+1$, l'operatore d_i riporta evidentemente l'albero $s_j(y)$ (con il ramo $\curlyvee$numerato da $j, j+1$) all'albero originale.
Infine, quando $i > j+1$, possiamo invertire le operazioni dopo avere osservato che la foglia numero i dell'albero $s_j(y)$ è la foglia numero $i - 1$ dell'albero y.

(s) L'operazione $s_i s_j$ su un albero y prima biforca la foglia numero j e poi biforca la foglia numero i. Quindi, è chiaro che se $i < j$ lo stesso albero può essere ottenuto operando le biforcazioni date in ordine inverso, osservando che la j-esima foglia di y è la foglia numero $j+1$ di $s_i(y)$. (Si noti che per $i = j$ l'operatore $s_i s_i$ sostituisce la i-esima foglia con il ramo $\curlyvee$, mentre l'operatore $s_{i+1} s_i$ produce il ramo $\curlyvee$, quindi non possono coincidere.) $\square$

8.1.3 - Degenerazioni sui moduli di catene delle dialgebre. Se la dialgebra D ha una bar-unità 1, le degenerazioni sugli alberi possono essere estese ai moduli di catene delle dialgebre. Per ogni $n \geq 0$ e ogni $j = 0, ..., n$, definiamo la degenerazione $s_j : CY_n(D, N) \longrightarrow CY_{n+1}(D, N)$ come

$$s_j(y \otimes (a_0, a_1, ..., a_n)) := s_j(y) \otimes (a_0, a_1, ..., a_j, 1, a_{j+1}, ..., a_n),$$

dove a_0 è preso in N.

8.1.4 - Lemma. *Se la D-corappresentazione N è unitaria, cioè $1 \Vdash n = n = n \dashv 1$ per tutti gli n, le mappe di degenerazione soddisfano le relazioni (ds) e (s) per $i < j$. Perciò il complesso di catene $CY_*(D, N)$ di una dialgebra bar-unitaria ha una struttura soggiacente di modulo quasi-simpliciale.*

Dimostrazione. (ds) Per $i < j$ i due termini sono

$$d_i s_j(y \otimes \underline{a}) = d_i s_j(y) \otimes (a_0, ..., a_i \circ_i^{s_j(y)} a_{i+1}, ..., a_j, 1, a_{j+1}, ..., a_n)$$

e

$$s_{j-1} d_i(y \otimes \underline{a}) = s_{j-1} d_i(y) \otimes (a_0, ..., a_i \circ_i^{y} a_{i+1}, ..., a_j, 1, a_{j+1}, ..., a_n).$$

Quindi l'uguaglianza segue da (8.1.2) e dall'uguaglianza $a_i \circ_i^{s_j(y)} a_{i+1} = a_i \circ_i^{y} a_{i+1}$ per $i < j$.

Per $i = j$ abbiamo:

$$d_i s_i(y \otimes \underline{a}) = d_i s_i(y) \otimes (a_0, ..., a_i \circ_i^{s_i(y)} 1, a_{i+1}, ..., a_n) = y \otimes \underline{a},$$

perché $d_i s_i(y) = y$ e $\circ_i^{s_i(y)} = \dashv$. Analogamente, per $i = j + 1$ l'identità $d_{j+1} s_j(y \otimes \underline{a}) = y \otimes \underline{a}$ segue da $\circ_{j+1}^{s_j(y)} = \vdash$. Infine, per $i > j + 1$ l'identità segue da (8.1.2) e $a_{i-1} \circ_i^{s_j(y)} a_i = a_{i-1} \circ_i^{y} a_i$ per $i > j$.

(s) Prendiamo $i < j$. Da un lato abbiamo

$$s_i s_j(y \otimes \underline{a}) = s_i s_j(y) \otimes (a_0, ..., a_i, 1, a_{i+1}, ..., a_j, 1, a_{j+1}, ..., a_n)$$

e dall'altro

$$s_{j+1} s_j(y \otimes \underline{a}) = s_{j+1} s_j(y) \otimes (a_0, ..., a_i, 1, a_{i+1}, ..., a_j, 1, a_{j+1}, ..., a_n).$$

Quindi l'uguaglianza segue da (8.1.2). □

8.2 Elementi degeneri e omologia normalizzata.

Molti risultati classici sui moduli simpliciali valgono anche per quelli pseudo-simpliciali, e questo ha importanti consequenze sull'omologia delle dialgebre. La prima è il teorema che abbiamo provato in dettaglio per il complesso bar di una dialgebra bar-unitaria in (2.3.1), e può facilmente essere generalizzato.

8.2.1 - Lemma. *Ogni modulo pseudo-simpliciale M che abbia una extra-degenerazione, cioè una mappa $s : M_n \longrightarrow M_{n+1}$ soddisfacente (ds) (con $s = s_{-1}$ o $s = s_{n+1}$), è aciclico.*

L'extra-degenerazione, in effetti, fornisce una omotopia contrattile per il complesso di catene associato al modulo pseudo-simpliciale. Si noti che nella dimostrazione non si fa nemmeno uso esplicito delle mappe di degenerazione. Perciò questo risultato può essere enunciato allo stesso modo per moduli pre-simpliciali.

8.2.2 - Extra-degenerazione. Il complesso di catene $(k[Y_*], d)$ di alberi binari ammette una extra-degenerazione: la mappa $s : Y_n \longrightarrow Y_{n+1}$ data da $s(y) := \curlyvee^{y}$. In (7.3.4), in effetti, abbiamo usato questa mappa per mostrare che il complesso è aciclico.

Questa extra-degenerazione non può essere estesa al complesso di catene di una dialgebra, anche se consideriamo solo coefficienti contenenti la bar-unità (prendendo cioè una dialgebra bar-unitaria D e la corappresentazione simmetrica unitaria $N = D^{op}$). Infatti, la extra-degenerazione estesa $s : CY_n(D,N) \longrightarrow CY_{n+1}(D,N)$ può solo essere definita come

$$s(y \otimes (a_0, a_1, ..., a_n)) := \curlyvee^{y} \otimes (1, a_0, a_1, ..., a_n).$$

Si vede allora che $d_0 s = id$, $d_i s = s d_{i-1}$ per $i = 1, ..., n$, ma $d_{n+1} s \neq s d_n$. Infatti,

$$d_{n+1} s(y \otimes (a_0, a_1, ..., a_n)) = d_{n+1}(\curlyvee^{y}) \otimes (1 \Vdash a_n, a_0, ..., a_{n-1}),$$

mentre

$$s d_n(y \otimes (a_0, a_1, ..., a_n)) = s d_n(y) \otimes (1, a_0 \circ_n^y a_n, a_1, ..., a_{n-1}).$$

Torneremo su questa mappa s più tardi in (8.4.2).

Il nome dato alle mappe di degenerazione è motivato da un altro risultato classico.

8.2.3 - Lemma. *Sia $M = \{M_n, d_i, s_j\}$ uno modulo pseudo-simpliciale. Per ogni $n \geq 0$ chiamiamo D_n the span lineare delle immagini delle mappe $s_0, ..., s_{n-1} : M_{n-1} \longrightarrow M_n$. Ogni D_n è un sottomodulo di M_n e inoltre (D_*, d) è un sottocomplesso di (M_*, d), dove $d = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$.*

Infine, questo complesso è aciclico, cioè $H_n(D_*, d) = 0$ per ogni $n \geq 1$.

Dimostrazione. Le relazioni (ds) mostrano con evidenza che ogni sottomodulo D_n è invariante per l'operatore di bordo. Infatti, ogni elemento $s_j(m) \in M_n$ ha immagine

$$ds_j(m) = s_{j-1}[\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i d_i(m)] + s_j[\sum_{i=j+2}^{n} (-1)^i d_{i-1}(m)]$$

che appartiene a D_{n-1}. (Si noti comunque che D stesso non è un modulo pre-simpliciale.)

La dimostrazione dell'aciclicità di (D_*, d) si svolge come per i moduli simpliciali (si veda per esempio (1.6.5) in [L1]). Consideriamo, cioè, la filtrazione

$$F_p D_n = \{\text{span lineare di } s_0, ... s_p : D_{n-1} \longrightarrow D_n\}.$$

Essa determina una sequenza spettrale che converge all'omologia di D_*. Il piano E^1_{pq} è l'omologia del bicomplesso graduato $Gr_p D_q$. Per $q \leq p$ si ha $Gr_p D_q = 0$, e per $q > p$ si dimostra che $(-1)^p s_p$ induce una omotopia contraente su $Gr_p D_*$, che è perciò aciclico. □

8.2.4 - Omologia normalizzata delle dialgebre. Come conseguenza immediata, data una dialgebra bar-unitaria D ed una corappresentazione unitaria N, abbiamo il sottocomplesso degli *elementi degeneri* di $CY_*(D,N)$,

$$DY_n(D,N) := \{s_j(y, \underline{a}) \in CY_n(D,N) \mid \text{per ogni } (y, \underline{a}) \in CY_{n-1}(D,N) \text{ e ogni degenerazione } s_j\}.$$

La famiglia di quozienti $\bar{C}Y_n(D,N) := CY_n(D,N)/DY_n(D,N)$ è anch'essa un complesso, che chiamiamo *complesso normalizzato* della dialgebra D. La sua omologia

$$\bar{H}Y_n(D,N) := H_n(\bar{C}Y_*(D,N), d)$$

si chiama *omologia normalizzata di D*.

Dal lemma (8.2.3) segue immediatamente:

8.2.5 - Proposizione. *Il complesso di elementi degeneri $DY_*(D,N)$ è aciclico, e le proiezioni canoniche $CY_n(D,N) \longrightarrow \bar{C}Y_n(D,N)$ inducono un isomorfismo sull'omologia,*

$$HY_*(D,N) \cong \bar{H}Y_*(D,N).$$

8.3 Teorema di Eilenberg-Zilber per moduli pseudo-simpliciali.

8.3.1 - Prodotto di complessi pseudo-simpliciali. Dati due moduli pseudo-simpliciali M e N, possiamo considerare il loro prodotto $M \times N$. È il ps-modulo con n-catene date dal prodotto tensoriale $M_n \otimes N_n$, facce e degenerazioni date rispettivamente da $d_i^{M\times N} := d_i^M \otimes d_i^N$ e $s_j^{M\times N} := s_j^M \otimes s_j^N$, per ogni $i, j = 0, ..., n$. Chiaramente $M \times N$ dà luogo ad un complesso di catene $(M \times N)_*$ con operatore di bordo dato da $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^{M\times N} = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^M \otimes d_i^N$.

Possiamo anche considerare il prodotto tensoriale $M_* \otimes N_*$ dei due complessi di catene M_* e N_* associati ai ps-moduli dati. Questo è un bicomplesso con (p,q)-catene date dal prodotto tensoriale $M_p \otimes N_q$, bordo orizzontale dato da $d^M \otimes id_N$ e bordo verticale dato da $id_M \otimes d^N$. Per 'omologia di $M_* \otimes N_*$' si intende l'omologia del complesso totale $\mathrm{Tot}(M,N)_n := \oplus_{p+q=n} M_p \otimes N_q$, che ha bordo $d^T = d^M \otimes id_N + id_M \otimes d^N$.

Invece, il complesso diagonale di questo bicomplesso ha n-catene $\Delta(M,N)_n := M_n \otimes N_n$ e bordo $d^\Delta = (d^M \otimes id_N) \circ (id_M \otimes d^N) = d^M \otimes d^N$. Quindi, in effetti, il complesso diagonale $\Delta(M,N)_*$ coincide con il complesso di catene $(M \times N)_*$.

Per i moduli simpliciali questi due complessi si dimostrano essere quasi-isomorfi. Ecco una generalizzazione del Teorema di Eilenberg-Zilber [E-Z2], [L1].

8.3.2 - Teorema. *Siano M e N due moduli pseudo-simpliciali. Allora esiste un isomorfismo sull'omologia*

$$H_n((M \times N)_*) \cong H_n(M_* \otimes N_*),$$

per ogni $n \geq 0$.

Dimostrazione. È stato dimostrato in [I], Teorema (1.4), che dato un doppio gruppo abeliano pseudo-simpliciale A_{**} esiste una sequenza spettrale

$$E^2_{pq} = H^v_p H^h_q(A_{**}) \Longrightarrow H_{p+q}(\Delta A_*),$$

dove $\Delta A_n = A_{nn}$ denota il complesso diagonale. Questo significa che i complessi diagonale e totale di A_{**} sono quasi-isomorfi. In particolare, questo risultato si applica al complesso doppio di moduli pseudo-simpliciali $M_p \otimes N_q$, i cui complessi totale e diagonale sono rispettivamente $M_* \otimes N_*$ e $(M \times N)_*$. □

La Formula di Künneth, che vale per il prodotto tensoriale di ogni complesso di catene, ci dice poi che

$$H_n(M_* \otimes N_*) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(M_*) \otimes H_q(N_*).$$

Così otteniamo la seguente versione semplificata del Teorema di Eilenberg-Zilber.

8.3.3 - Corollario. *Siano M e N due moduli pseudo-simpliciali. Se il complesso M_* è aciclico, allora abbiamo un isomorfismo*

$$H_n((M \times N)_*) \cong H_n(N_*),$$

per ogni $n \geq 0$.

Illustriamo immediatamente qualche conseguenza di questo corollario.

8.4 Isomorfismo con l'omologia di Hochschild.

Poiché un'algebra associativa dà luogo ad una dialgebra A_{di}, è naturale cercare di rapportare l'omologia della dialgebra di A_{di} all'omologia di Hochschild di A. La prima conseguenza del Teorema di Eilenberg-Zilber per i moduli pseudo-simpliciali è un isomorfismo sull'omologia per le algebre unitarie.

8.4.1 - Teorema. *Sia A un'algebra associativa unitaria e M un bimodulo unitario su A. Allora l'omologia di dialgebra di A a coefficienti in M è isomorfa all'omologia di Hochschild, cioè*

$$HY_n(A, M) \cong H_n(A, M),$$

per ogni $n \geq 0$.

Si noti che il complesso di catene $CY_*(D, N)$ di una dialgebra D in generale non è il prodotto del complesso di catene di alberi, $k[Y_*]$, per un altro complesso, perché le mappe di faccia definite sulla componente tensoriale $N \otimes D^{\otimes n}$ dipendono strettamente dagli alberi.

Dimostrazione. Quando A è un'algebra associativa, i prodotti $\circ_i^y$ utilizzati negli operatori di bordo per l'omologia delle dialgebre, non dipendono in effetti dagli alberi, poiché coincidono sempre con l'unico prodotto dato su A. Perciò il complesso di dialgebra di A, con catene $CY_n(A, M) = k[Y_n] \otimes M \otimes A^{\otimes n}$, è associato al prodotto di due ps-moduli. (Alternativamente è il diagonale del prodotto tensoriale di due complessi.)

Uno è evidentemente il modulo pseudo-simpliciale degli alberi $k[Y_*]$, che è aciclico. Ciò che rimane, poiché A è un'algebra unitaria, è il modulo simpliciale delle catene di Hochschild. L'isomorfismo segue quindi da (8.3.3). □

8.4.2 - Omotopia esplicita per $M = A$. Quando $M = A$, esiste una interessante omotopia che può essere usata per dimostrare costruttivamente l'isomorfismo fra l'omologia di Hochschild e quella di dialgebra. Ne discutiamo ora in dettaglio.

Siano $C_n(A, A) = A^{\otimes n+1}$ e $CY_n(A, A) = k[Y_n] \otimes A^{\otimes n+1}$ i moduli di catene di Hochschild e di dialgebra per $M = A$. Per ogni $n \geq 0$, sia

$$\pi : k[Y_n] \otimes A^{n+1} \longrightarrow A^{n+1} \ , \quad \pi(y \otimes \underline{a}) = \underline{a}$$

la proiezione canonica che 'tralascia' gli alberi. Questa commuta con i bordi, inducendo una suriezione di complessi. Mostriamo che π è un quasi-isomorfismo.

Sia $i : C_n(A, A) \hookrightarrow CY_n(A, A)$ l'inclusione

$$i(\underline{a}) = \curlyvee \otimes \underline{a},$$

che identifica il complesso di Hochschild di A con la componente del modulo di catene della dialgebra individuata dagli alberi a pettine $\curlyvee\!\!\curlyvee$. È facile vedere che commuta con i bordi, perciò la sua immagine è un sottocomplesso di $CY_*(A,A)$. Chiaramente $\pi \circ i = id_{C_n}$, e $i \circ \pi(y \otimes \underline{a}) = \curlyvee\!\!\curlyvee \otimes \underline{a}$. Mostriamo che $i \circ \pi$ è omotopico all'identità id_{CY_n}.

Sia $s : CY_n(A) \longrightarrow CY_{n+1}(A)$ definito da

$$s(y \otimes \underline{a}) := \curlyvee^{y} \otimes (1, a_0, ..., a_n).$$

(Confrontare con (8.2.2) e (7.3.4).) È facile verificare che $d_0 s = id_{CY_n}$, e $d_i s = s d_{i-1}$ per $0 < i \leq n$ (ma $d_{n+1} s \neq s d_n$).

Ora definiamo $t : CY_n(A) \longrightarrow CY_n(A)$ mediante $t := (-1)^n d_{n+1} s$. In modo esplicito

$$t(y \otimes \underline{a}) = (-1)^n \curlyvee^{d_n y} \otimes (a_n, a_0, ..., a_{n-1}),$$

perciò

$$t^{n+1}(y \otimes \underline{a}) = \curlyvee\!\!\curlyvee \otimes \underline{a} = i \circ \pi(y \otimes \underline{a}).$$

Ora, ponendo $N := \sum_{i=0}^{n} t^i$ e $B := (id - t)sN$, si ottiene

$$dB + Bd = id_{CY} - t^{n+1},$$

(vedere (10.6.14) in [L1] per i dettagli), e quindi si dimostra che B è un'omotopia fra $i \circ \pi$ e id_{CY}. $\square$

Da (7.5.3) segue immediatamente che l'omologia di Hochschild di algebre unitarie può essere interpretata come il funtore derivato del bifuntore tensoriale $\otimes_{E(A)}$ nella categoria dei moduli su $E(A)$, e non solo come funtore derivato del tensore $\otimes_{A^e}$ nella categoria dei moduli sull'algebra inviluppo universale A^e.

8.4.3 - Corollario. *Per ogni algebra associativa unitaria A, e ogni A-bimodulo M, si hanno gli isomorfismi*

$$H_n(A,M) \cong \mathrm{Tor}_n^{E(A)}(M,A) \quad e \quad H^n(A,M) \cong \mathrm{Ext}^n_{E(A)}(A,M),$$

8.5 Invarianza di Morita.

Il Teorema di Eilenberg-Zilber per moduli pseudo-simpliciali ci consente di dimostrare l'invarianza di Morita dell'omologia di dialgebra per le matrici, senza fare esplicito uso della mappa di traccia generalizzata.

8.5.1 - Teorema. *Sia D una dialgebra, ed N una D-corappresentazione. Consideriamo, per ogni numero naturale r, la dialgebra $M_r(D)$ delle matrici $r \times r$ a coefficienti in D e la sua corappresentazione $M_r(N)$. Se D ha una bar-unità, e N è una corappresentazione bar-unitaria, allora esiste un isomorfismo sull'omologia di dialgebra*

$$HY_n(M_r(D), M_r(N)) \cong HY_n(D,N),$$

per ogni $n \geq 0$.

Dimostrazione. La dimostrazione è basata sull'isomorfismo di k-spazi vettoriali $\mathrm{M}_r(D) \cong \mathrm{M}_r(k) \otimes D$. Consideriamo due complessi.

Chiamiamo (C^1_*, b^1) il complesso di Hochschild dell'algebra associativa $\mathrm{M}_r(k)$ con coefficienti in se stessa, cioè il complesso con moduli di catene $C^1_n = \mathrm{M}_r(k)^{\otimes n+1}$ e bordo di Hochschild. Poiché l'algebra associativa $\mathrm{M}_r(k)$ ha l'unità, sappiamo che il complesso C^1_* è associato ad un modulo simpliciale, che indichiamo con C^1, e che è aciclico, cioè $H_0(C^1_*) = k$ e $H_n(C^1_*) = 0$ per ogni $n \geq 1$.

Chiamiamo (C^2_*, b^2) il complesso di dialgebra di D a coefficienti nella corappresentazione N, cioè il complesso con moduli di catene $C^2_n = k[Y_n] \otimes N \otimes D^{\otimes n}$ e il bordo di dialgebra. Quando D ha una bar-unità, e N è una corappresentazione bar-unitaria di D, il complesso C^2_* è associato a un modulo pseudo-simpliciale che indichiamo con C^2. Allora possiamo applicare (8.3.3) e concludere che

$$H_n(\Delta(C^1_* \otimes C^2_*), b^1 \otimes b^2) = H_n(C^1 \times C^2) \cong H_n(C^2_*, b^2) = HY_n(D, N)$$

per ogni $n \geq 0$, dove $\Delta(C^1_* \otimes C^2_*)$ è il complesso diagonale del prodotto tensoriale dei due ps-moduli.

Infine, il risultato segue dal fatto che il complesso di dialgebra di $\mathrm{M}_r(D)$ a coefficienti in $\mathrm{M}_r(N)$ è isomorfo al complesso diagonale $(\Delta(C^1_* \otimes C^2_*), b^1 \otimes b^2)$. □

8.5.2 - Osservazione. L'invarianza di Morita dell'omologia di dialgebra può essere dimostrata facendo vedere che l'inclusione

$$\begin{aligned} \mathrm{inc} : k[Y_n] \otimes N \otimes D^{\otimes n} &\hookrightarrow k[Y_n] \otimes \mathrm{M}_r(N) \otimes \mathrm{M}_r(D)^{\otimes n} \\ y \otimes (a_0, a_1, ..., a_n) &\mapsto y \otimes (E_{1,1}(a_0), E_{1,1}(a_1), ..., E_{1,1}(a_n)) \end{aligned}$$

è un quasi-isomorfismo di complessi, come per l'omologia di Hochschild di algebre associative, solo nel caso in cui la corappresentazione N sia l'opposta simmetrica (o antisimmetrica) di una rappresentazione M su D, $N = M^{op}$. Come al solito, consideriamo la mappa di raccia generalizzata

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} : k[Y_n] \otimes \mathrm{M}_r(N) \otimes \mathrm{M}_r(D)^{\otimes n} &\longrightarrow k[Y_n] \otimes N \otimes D^{\otimes n} \\ y \otimes (\alpha^0, \alpha^1, ..., \alpha^n) &\mapsto \sum_{i_0, i_1, ..., i_n = 0}^{n} y \otimes (\alpha^0_{i_0 i_1}, \alpha^1_{i_1 i_2}, ..., \alpha^n_{i_n i_0}). \end{aligned}$$

È facile verificare che $\mathrm{tr} \circ \mathrm{inc} = id$, e B. Richter [R] ha dimostrato che $\mathrm{inc} \circ \mathrm{tr}$ è omotopica a id se la corappresentazione N è l'opposta di una rappresentazione. La ragione per questa restrizione è il *lato* su cui D agisce. Infatti esiste una omotopia presimpliciale $h = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i h_i$ definita per mezzo delle matrici elementari,

$$h_i(y \otimes (\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^n)) := s_i(y) \otimes \sum (E_{j1}(\alpha^0_{jk}), E_{11}(\alpha^1_{kl}), ..., E_{11}(\alpha^i_{pq}), E_{1q}(1), \alpha^{i+1}, ..., \alpha^n),$$

che soddisfa le relazioni $d_0 h_0 = id$, $d_i h_i = d_i h_{i-1}$ per $i \leq n$ e $d_{n+1} h_n = \mathrm{inc} \circ \mathrm{tr}$, solo se la faccia d_0 fa agire $\mathrm{M}_r(D)$ sulla destra di $\mathrm{M}_r(N)$, e dualmente la faccia d_n fa agire $\mathrm{M}_r(D)$ sulla sinistra di $\mathrm{M}_r(N)$.

8.6 Formula di Künneth.

L'ultima conseguenza del Teorema di Eilenberg-Zilber che menzioniamo è una forma debole della formula di Künneth per l'omologia di dialgebra.

8.6.1 - Teorema. *Sia D una dialgebra con una corappresentazione N, e sia A un'algebra associativa con un bimodulo M. Se tutti questi spazi sono (bar-)unitari, abbiamo un isomorfismo sull'omologia*

$$HY_*(A \otimes D, M \otimes N) \cong HY_*(A, M) \otimes HY_*(D, N).$$

Dimostrazione. Come al solito, il modulo di n-catene della dialgebra $A \otimes D$,

$$CY_*(A \otimes D, M \otimes N) = k[Y_n] \otimes M \otimes N \otimes A^{\otimes n} \otimes D^{\otimes n},$$

si spezza nel prodotto di due ps-moduli: uno è il modulo di catene di Hochschild di A, e l'altro è il modulo di catene di dialgebra di D. Per (8.3.3) abbiamo allora un isomorfismo

$$HY_n(A \otimes D, M \otimes N) \cong H_n(A, M) \otimes HY_n(D, N)$$

per ogni $n \geq 0$. Ricordando (8.4.1), otteniamo la formula finale. □

Chapter 9

Omologia simmetrica delle dialgebre

Una delle più interessanti questioni sull'omologia delle dialgebre è la relazione con l'omologia di Leibniz. Nel prossimo capitolo dimostriamo un risultato, a questo proposito, che mostra che l'omologia HY di dialgebra non è la sola teoria di omologia per le dialgebre. Ne introduciamo quì una variazione importante, basata sulle permutazioni, che era già conosciuta per le algebre associative [C], [L1]. L'idea è di sostituire dappertutto, nei capitoli precedenti, gli insiemi Y_n di n-alberi con gli insiemi S_n delle permutazioni su n elementi.

9.1 Permutazioni e complesso di catene simmetriche.

9.1.1 - Permutazioni. Per ogni numero naturale n, sia S_n l'insieme delle permutazioni su n elementi. Una permutazione σ viene indicata per mezzo della sua immagine ordinata $(\sigma(1), ..., \sigma(n))$ o come il prodotto di cicli $\omega^1\omega^2 \cdots \omega^m$, dove ogni ciclo è della forma $\omega^k = (\omega_1^k \cdots \omega_{n_k}^k)$. Se assumiamo che ogni ciclo abbia il primo termine minore di tutti gli altri, cioè $\omega_i^k < \omega_i^k$ per ogni $i < j$, e che l'ordine dei cicli sia dato dall'ordine cresciente dei primi termini, cioè che $\omega_1^k < \omega_1^{k+1}$ per tutti gli $k = 1, ..., m-1$, allora la presentazione della permutazione come prodotto di cicli è unica. Per esempio la permutazione che ha immagine ordinata $(4, 1, 6, 2, 5, 3)$ può essere scritta come il prodotto dei tre cicli $(142)(36)(5)$. (Nelle notazioni precedenti quì si ha: $n = 6$, $m = 3$, $\omega^1 = (142)$, $\omega^2 = (36)$ e $\omega^3 = (5)$.)

Si noti che non consideriamo la struttura di gruppo degli insiemi S_n, perciò con *omeomorfisomo* da una permutazione σ ad un'altra permutazione σ' intendiamo un morfismo nella categoria degli insiemi.

Le permutazioni si possono ottenere l'una dall'altra ripetendo due possibili operazioni basilari: togliere ed aggiungere numeri. L'operazione che consiste nel togliere dei numeri permette di definire gli operatori di faccia $S_n \longrightarrow S_{n-1}$ e perciò di considerare il complesso di catene associato $k[S_*]$. L'operazione di aggiungere numeri permette di definire due tipi di mappe crescienti $S_n \longrightarrow S_{n+1}$, che corrispondono alle degenerazioni ed alle extra-degenerazioni sul complesso di catene delle permutazioni.

9.1.2 - Facce sulle permutazioni. Per ogni $n \geq 0$, e ogni $i = 0, ..., n$, definiamo l'operatore di faccia

$$d_i : S_n \longrightarrow S_{n-1}$$

come la mappa che rimuove il termine $\max(\sigma(i), \sigma(i+1))$ per $i = 1, ..., n-1$, il termine $\sigma(1)$ per $i = 0$ ed il termine $\sigma(n)$ per $i = n$ dall'immagine di una permutazione σ, e poi riordina i restanti numeri $\sigma(1), ..., \sigma(n)$ da 1 a $n-1$. (D'ora in poi indichiamo con $\overline{\sigma(1)}, ..., \overline{\sigma(n)}$ ogni sequenza riscalata.) Per esempio:

$$d_0(2,1,3) = (1,2) = d_1(2,1,3) \quad \text{e} \quad d_2(2,1,3) = (2,1) = d_3(2,1,3).$$

Per descrivere le facce d_0 e d_n con le stesse regole date per le altre, assumiamo che l'insieme S_n sia immerso nell'insieme S_{n+1}, isomorfo al sottinsieme di permutazioni sui numeri $0, 1, ..., n$ tale che $\sigma(0) = 0$, e identifichiamo $n+1 = 0$. Allora $\max(\sigma(0), \sigma(1)) = \sigma(1)$ e $\max(\sigma(n), \sigma(n+1)) = \sigma(n)$.

9.1.3 - Lemma. *Gli operatori di faccia soddisfano le relazioni (d) per ogni $i < j$. Quindi $(k[S_*], d)$ è un complesso di catene con operatore di bordo $d : k[S_n] \longrightarrow k[S_{n-1}]$ dato da $d = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$.*

Dimostrazione. Infatti da entrambi i lati le mappe agiscono su una permutazione σ rimuovendo i termini $\max(\sigma(i), \sigma(i+1))$ e $\max(\sigma(j), \sigma(j+1))$ nei due possibili ordini: prima $\max(\sigma(j), \sigma(j+1))$ e poi $\max(\sigma(i), \sigma(i+1))$, o l'inverso. Così producono la stessa modificazione. $\square$

9.1.4 - Catene simmetriche sulle dialgebre. Sia D una dialgebra su k ed N una corappresentazione di D. Per ogni $n \geq 0$, definiamo il *modulo delle \$n\$-catene simmetriche di D a coefficienti in N* come

$$CS_n(D,N) := k[S_n] \otimes N \otimes D^{\otimes n},$$

e l'operatore di bordo $d : CS_n(D,N) \longrightarrow CS_{n-1}(D,N)$ come l'applicazione k-lineare $d = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$ data per mezzo delle facce

$$d_i(\sigma \otimes (a_0, a_1, ..., a_n)) := \begin{cases} d_0(\sigma) \otimes (a_1 \circ_0^\sigma a_0, a_2, ..., a_n), & \text{per } i = 0, \\ d_i(\sigma) \otimes (a_0, a_1, ..., a_i \circ_i^\sigma a_{i+1}, ..., a_n) & \text{per } i = 1, ..., n-1, \\ d_n(\sigma) \otimes (a_0 \circ_n^\sigma a_n, a_1, ..., a_{n-1}), & \text{per } i = n, \end{cases}$$

per ogni n-permutazione σ, $a_0 \in N$ e $a_1, ..., a_n \in D$; dove le facce d_i sulla permutazione σ sono definite in (9.1.2) e le operazioni $\circ_i^\sigma$ sono definite da

$$a_1 \circ_0^\sigma a_0 := \begin{cases} a_1 \dashv\!\!\!\mid a_0, & \text{se } \sigma(1) = 1 \\ a_1 \mid\!\!\!\vdash a_0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a_i \circ_0^\sigma a_{i+1} := \begin{cases} a_i \dashv a_{i+1}, & \text{se } \sigma(i) < \sigma(i+1) \\ a_i \vdash a_{i+1}, & \text{se } \sigma(i) > \sigma(i+1) \end{cases}$$

$$a_0 \circ_n^\sigma a_n := \begin{cases} a_0 \mid\!\!\!\vdash a_n, & \text{se } \sigma(n) = n \\ a_0 \dashv\!\!\!\mid a_n, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quando $N = D^{op}$ è la corappresentazione simmetrica definita in (6.2.1) sul k-modulo D, il modulo delle \$n\$-catene di D è

$$CS_n(D, D^{op}) = k[S_n] \otimes D^{\otimes n+1},$$

e le facce d_0 e d_n assumono la semplice forma

$$\begin{cases} d_0(\sigma \otimes (a_0, a_1, ..., a_n)) = d_0(\sigma) \otimes (a_0 \dashv a_1, a_2, ..., a_n), \\ d_n(\sigma \otimes (a_0, a_1, ..., a_n)) = d_n(\sigma) \otimes (a_n \vdash a_0, a_1, ..., a_{n-1}), \end{cases}$$

per ogni n-permutazione σ e $(a_0, a_1, ..., a_n) \in D^{\otimes n+1}$.

9.1.5 - Lemma. *L'operatore di bordo dato sopra soddisfa l'idenità* $d \circ d = 0$*, quindi* $(CS_*(D, N), d)$ *è un complesso di catene.*

Dimostrazione. Dopo (9.1.3), rimane da mostrare che per ogni $\sigma \in S_n$, e $\underline{a} = (a_0, a_1, ..., a_n) \in D^{\otimes n+1}$ l'idenità

$$(a_0, ..., a_i \circ_i^{s_j(\sigma)} a_{i+1}, ..., a_j \circ_j^{\sigma} a_{j+1}, ..., a_n) = (a_0, ..., a_i \circ_i^{\sigma} a_{i+1}, ..., a_j \circ_{j-1}^{s_i(\sigma)} a_{j+1}, ..., a_n)$$

vale per ogni $i < j$. Consideriamo separatamente il caso $i + 1 < j$ ed il caso $i + 1 = j$.

Nel primo caso, cioè $i + 1 < j$, quando $\min(\sigma(i), \sigma(i+1)) < \min(\sigma(j), \sigma(j+1))$ entrambi i termini sono

$$(a_0, ...a_i \circ_i^{\sigma} a_{i+1}, ..., a_j \circ_j^{\sigma} a_{j+1}, ..., a_n)$$

perciò coincidono. Analogamente, quando $\min(\sigma(i), \sigma(i+1)) > \min(\sigma(j), \sigma(j+1))$ entrambi i termini sono

$$(a_0, ..., a_j \circ_j^{\sigma} a_{j+1}, ..., a_i \circ_i^{\sigma} a_{i+1}, ..., a_n).$$

Perciò di nuovo coincidono.

Nel secondo caso, cioè $i+1 = j$, questi due termini si sovrappongono l'un l'altro, e si verifica l'uguaglianza usando gli assiomi (D) per i prodotti sinistro e destro. Infatti nel primo lato si ha:

$$(a_0, ..., a_i \circ_i^{\sigma} (a_{i+1} \circ_{i+1}^{\sigma} a_{i+2}), ..., a_n),$$

e nell'altro:

$$(a_0, ..., (a_i \circ_i^{\sigma} a_{i+1}) \circ_{i+1}^{\sigma} a_{i+2}, ..., a_n).$$

Quindi dobbiamo verificare l'uguaglianza dei termini $a_i \circ_i^{\sigma} (a_{i+1} \circ_{i+1}^{\sigma} a_{i+2})$ e $(a_i \circ_i^{\sigma} a_{i+1}) \circ_{i+1}^{\sigma} a_{i+2}$ nei sei casi illustrati nella tabella seguente:

Casi	$\sigma(i) < \sigma(i+1)$	$\sigma(i) > \sigma(i+1)$
$\sigma(i+1) < \sigma(i+2)$	$\sigma(i) < \sigma(i+1) < \sigma(i+2)$	$\sigma(i+1) < \sigma(i) < \sigma(i+2)$ $\sigma(i+1) < \sigma(i+2) < \sigma(i)$
$\sigma(i+1) > \sigma(i+2)$	$\sigma(i) < \sigma(i+2) < \sigma(i+1)$ $\sigma(i+2) < \sigma(i) < \sigma(i+1)$	$\sigma(i+2) < \sigma(i+1) < \sigma(i)$

È facile ora verificare caso per caso:

- $\sigma(i) < \sigma(i+1) < \sigma(i+2) \Longrightarrow a_i \dashv (a_{i+1} \dashv a_{i+2}) = (a_i \dashv a_{i+1}) \dashv a_{i+2}$,
- $\sigma(i) < \sigma(i+2) < \sigma(i+1) \Longrightarrow a_i \dashv (a_{i+1} \vdash a_{i+2}) = (a_i \dashv a_{i+1}) \dashv a_{i+2}$,

- $\sigma(i+2) < \sigma(i) < \sigma(i+1) \Longrightarrow a_i \vdash (a_{i+1} \vdash a_{i+2}) = (a_i \dashv a_{i+1}) \vdash a_{i+2}$,
- $\sigma(i+1) < \sigma(i) < \sigma(i+2) \Longrightarrow a_i \vdash (a_{i+1} \dashv a_{i+2}) = (a_i \vdash a_{i+1}) \dashv a_{i+2}$,
- $\sigma(i+1) < \sigma(i+2) < \sigma(i) \Longrightarrow a_i \vdash (a_{i+1} \dashv a_{i+2}) = (a_i \vdash a_{i+1}) \dashv a_{i+2}$,
- $\sigma(i+2) < \sigma(i+1) < \sigma(i) \Longrightarrow a_i \vdash (a_{i+1} \dashv a_{i+2}) = (a_i \vdash a_{i+1}) \vdash a_{i+2}$.

Perciò le sei uguaglianze sono precisamente i cinque assiomi (D) della dialgebra D (l'assioma 'centrale' è usato due volte). $\square$

9.1.6 - Omologia simmetrica delle dialgebre. Sia D una dialgebra, ed N una corappresentazione di D. Indichiamo con

$$HS_n(D, N) := H_n(CS_*(D, N), d)$$

l'omologia del complesso di catene definito in (9.1.4), per ogni $n \geq 0$. Quando $N = D^{op}$ è la corappresentazione simmetrica definita in (6.2.1) sul k-modulo D, indichiamo con

$$HHS_*(D) := HS_*(D, D^{op})$$

l'omologia di D a coefficienti in se stessa. Quando A è un'algebra associativa, e M è un A-bimodulo, indichiamo semplicemente con

$$HS_*(A, M) := HS_*(A_{di}, M^{op})$$

l'omologia di A considerata come una dialgebra, dove M^{op} è la corappresentazione simmetrica definita da M.

9.1.7 - Calcoli elementari. Data una dialgebra D con una corappresentazione N, il primo bordo di D in N è la mappa k-lineare $d : N \otimes D \longrightarrow N$ definita da $d(n, a) := a \dashv\vdash n - n \Vdash a$, per ogni $n \in N$ e $a \in D$. Perciò $HS_0(D, M)$ è il modulo degli elementi coinvarianti di N per l'algebra di Leibniz D_L,

$$HS_0(D, N) = N/[\![N, D]\!],$$

dove $[\![N, D]\!] := \{ [\![n, a]\!] = a \dashv\vdash n - n \Vdash a \mid n \in N, a \in D\}$. Come per l'omologia di dialgebra (si veda (7.3.3)), quando $N = D^{op}$ si ha

$$HHS_0(D) = D/[D, D].$$

9.1.8 - Osservazione. Nella dimostrazione delle relazioni simpliciali (d) per le facce d_i definite sui moduli di catene $CS_n(D, N)$ abbiamo usato tutti gli assiomi di dialgebra (D), ma la terza idenità è stata usata due volte. In principio, ciò significa che le dialgebre non sono il tipo più generale di algebre su cui l'omologia HS ha senso.

Ciononostante, J.-L. Loday ha osservato che la bar HS-omologia, cioè l'omologia $HS_*(D, k)$ a coefficienti nella D-corappresentazione triviale, non è la teoria naturale per una categoria di algebre su un'operad di Koszul. Se questo fosse vero, la sua operad duale $\mathcal{P}^!$ in dimensione n dovrebbe essere isomorfa ad $n!$ copie della rappresentazione regolare di S_n, $\mathcal{P}^!(n) = k[S_n] \otimes k[S_n]$. Quindi la sua funzione generatrice dovrebbe essere la sua serie formale

$$g_{\mathcal{P}^!}(x) = \sum_{n \geq 1} dim \mathcal{P}^!(n) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 1} n! x^n.$$

che invece non ammette serie inversa con coefficienti interi.

9.2 Struttura pseudo-simpliciale.

9.2.1 - Degenerazioni sulle permutazioni. Per ogni $n \geq 0$ e ogni $j = 0, ..., n$, definiamo la degenerazione

$$s_j : S_n \longrightarrow S_{n+1}$$

come la mappa che inserisce il numero $n+1$ nell'immagine di una permutazione σ, fra i termini $\sigma(j)$ e $\sigma(j+1)$. (Ricordiamo che, per convenzione, $\sigma(0) = 0 = \sigma(n+1)$.) In particolare si ha sempre $s_0(\sigma) = (n+1, \sigma(1), ..., \sigma(n))$ e $s_0(\sigma) = (\sigma(1), ..., \sigma(n), n+1)$. Per esempio:

$$s_0(2,1,3) = (4,2,1,3), \;\; s_1(2,1,3) = (2,4,1,3), \;\; \text{e così via.}$$

9.2.2 - Lemma. *Le mappe di degenerazione soddisfano le relazioni (ds). (Si noti che non soddisfano (s) per alcun i e j.)*

Dimostrazione. (ds) Le operazioni $d_i s_j$ su una permutazione σ prima aggiungono il numero $n+1$ fra i termini $\sigma(j)$ e $\sigma(j+1)$, e poi cancellano il termine $\max(\sigma(i), \sigma(i+1))$ riordinando i numeri rimanenti: alla fine $n+1$ diventa n. Così, quando $i < j$, è chiaro che otteniamo la stessa permutazione se prima cancelliamo il termine $\max(\sigma(i), \sigma(i+1))$,e riordiniamo i rimanenti numeri da 1 a $n-1$, e poi aggiungiamo n fra i termini che sono ora nelle posizioni $j-1$ e j.

Quando $i = j$, l'operatore d_i evidentemente riporta la permutazione $s_j(\sigma)$ alla permutazione originale, poiché cancella il termine $\max(\sigma(i), n+1) = n+1$. Analogamente, quando $i = j+1$, l'operatore d_{j+1} cancella il termine $\max(n+1, \sigma(j+1)) = n+1$ da $s_j(\sigma)$ e quindi ridà σ.

Infine, quando $i > j+1$, si ripete quanto detto per il primo caso.

(s) Queste relazioni non valgono. Infatti, per $i < j$ si ha

$$s_i s_j(\sigma) = (\sigma(1), ..., \sigma(i), n+2, \sigma(i+1), ..., \sigma(j), n+1, \sigma(j+1), ..., \sigma(n))$$

e

$$s_{j+1} s_i(\sigma) = (\sigma(1), ..., \sigma(i), n+1, \sigma(i+1), ..., \sigma(j), n+2, \sigma(j+1), ..., \sigma(n)).$$

Analogamente per $i = j$. □

9.2.3 - Degenerazioni sulle catene simmetriche. Se la dialgebra D ha una bar-unità 1, anche i moduli di catene $CS_*(D, N)$ possono essere muniti degli operatori di degenerazione. Per ogni $n \geq 0$ e ogni $j = 0, ..., n$, definiamo la mappa $s_j : CS_n(D, N) \longrightarrow CS_{n+1}(D, N)$ come

$$s_j(\sigma \otimes (a_0, a_1, ..., a_n)) := s_j(\sigma) \otimes (a_0, a_1, ..., a_j, 1, a_{j+1}, ..., a_n).$$

9.2.4 - Lemma. *Se la D-corappresentazione N è unitaria (cioè se $1 \Vdash n = n = n \dashv\vert 1$ per tutti gli n), le mappe di degenerazione soddisfano le relazioni (ds). Perciò il complesso di catene $CS_*(D, N)$ di una dialgebra bar-unitaria possiede una struttura di modulo pseudo-simpliciale soggiacente.*

Dimostrazione. Dopo (9.2.2), si provano le relazioni (ds) con le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}
&a_i \circ_i^{s_j(\sigma)} a_{i+1} = a_i \circ_i^{s_j(\sigma)} a_{i+1} && \text{per } i < j,\\
&a_i \circ_i^{s_i(\sigma)} 1 = a_i && \text{per } i = j,\\
&1 \circ_{j+1}^{s_j(\sigma)} a_{j+1} = a_{j+1} && \text{per } i = j+1,\\
&a_{i-1} \circ_i^{s_j(\sigma)} a_i = a_{i-1} \circ_{i-1}^{s_j(\sigma)} a_i && \text{per } i > j+1.
\end{aligned}$$

□

9.2.5 - Osservazione. È già stato osservato da J. Lodder in [Lo], lemma (2.5), che il complesso di catene delle permutazioni $(k[S_*], d)$ è aciclico. L'omotopia contraente è data dalla mappa $s : S_n \longrightarrow S_{n+1}$ che inserisce 1 prima di $\sigma(1)$, $s(\sigma) := (1, \sigma(1)+1, ..., \sigma(n)+1)$. Infatti questa mappa costituisce una extra-degenerazione $s = s_{-1}$ per il complesso di catene pseudo-simpliciale delle permutazioni.

Si osservi anche (confrontare con (8.2.2)) che questa extra-degenerazione non può essere estesa al complesso di catene di una dialgebra. Consideramo una dialgebra bar-unitaria D e la corappresentazione simmetrica ed unitaria $N = D^{op}$. L'extra-degenerazione estesa $s : CS_n(D, N) \longrightarrow CS_{n+1}(D, N)$ dovrebbe essere

$$s(\sigma \otimes (a_0, a_1, ..., a_n)) := s(\sigma) \otimes (1, a_0, a_1, ..., a_n).$$

In [C] è già stato osservato che $d_0 s = id$, $d_i s = s d_{i-1}$ per $i = 1, ..., n$, ma $d_{n+1}s \neq s d_n$. Infatti,

$$d_{n+1}s(\sigma \otimes (a_0, a_1, ..., a_n)) = d_{n+1}s(\sigma) \otimes (1 \Vdash a_n, a_0, ..., a_{n-1}),$$

while

$$s d_n(\sigma \otimes (a_0, a_1, ..., a_n)) = s d_n(\sigma) \otimes (1, a_0 \circ_n^{\sigma} a_n, a_1, ..., a_{n-1}).$$

La mappa s è stata usata da C. Cuvier [C] per definire l'isomorfismo fra l'omologia di Hochschild e l'omologia simmetrica (o meglio una sua leggera variazione) per un'algebra associativa unitaria. Ricordiamo il suo metodo in (9.4.4).

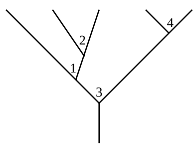
9.3 Alberi con livelli, relazione con l'omologia di dialgebra.

Dunque la teoria di omologia HS ha proprietà molto simili a quelle della teoria naturale di omologia HY delle dialgebre. Entrambi i complessi sono pseudo-simpliciali, e l'unica differenza è che le degenerazione sul complesso CY soddisfano anche le relazioni (s) per $i < j$.

La relazione precisa fra le due teorie di omologia è data dagli alberi con livelli, che ora descriviamo.

9.3.1 - Alberi con livello. Indichiamo con $\tilde{Y}_n$ l'insieme degli alberi planari e binari con una radice ed n vertici interni (che equivale ad avere $n+1$ foglie) posti, stavolta, ognuno ad un livello di altezza, cominciando dalla radice e prtoseguendo verso le foglie. Per esempio, e sono alberi con livelli, mentre l'albero non è a livello. Chiaramente esiste una proiezione $\tilde{Y}_n \longrightarrow Y_n$ che consiste nel 'dimenticare' i livelli dei vertici interni dell albero.

Scegliamo la seguente regola per ordinare i vertici interni. Ogni vertice interno chiude un percorso discendente che inizia nel *buco* fra due foglie consecutive ed è delimittato da lati dell'albero. Numeriamo un vertice interno con i se il suo buco associato è posto fra le foglie numero $i-1$ e i. Per esempio:

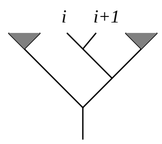


Un n-albero con livelli può essere identificato con la permutazione che associa ad ogni vertice numerato il suo livello. Perciò c'è una corrispondenza biettiva fra l'insieme S_n delle permutazioni su n elementi e l'insieme $\tilde{Y}_n$ degli n-alberi con livelli. In una permutazione σ, il termine $\sigma(i)$ determina un livello e perciò un vertice interno dell'associato albero con livelli.

9.3.2 - Lemma. *Per ogni numero naturale n, la composizione $S_n \approx \tilde{Y}_n \longrightarrow Y_n$ è una suriezione che commuta con le facce e le degenerazioni su S_n e Y_n. Perciò induce una suriezione di moduli pseudo-simpliciali*

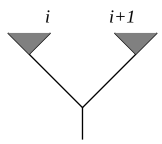
$$k[S_n] \longrightarrow k[Y_n].$$

Dimostrazione. Ricordiamo che la faccia d_i cancella il termine $\max \sigma(i), \sigma(i+1)$ dall'immagine di una permutazione σ, e la i-esima foglia dell'albero associato y. Cancellare una foglia equivale a cancellare il vertice che unisce questa foglia al resto dell'albero. Perciò dobbiamo mostrare che il termine $\max \sigma(i), \sigma(i+1)$ corrisponde al vertice interno in cui la i-esima foglia incontra un lato. Dalla definizione della biezione $S_n \approx \tilde{Y}_n$ segue che la i-esima foglia è orientata come \ o / a seconda di cosa è $\max \sigma(i), \sigma(i+1)$:



$\sigma(i) < \sigma(i+1)$

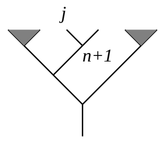
o



$\sigma(i) > \sigma(i+1)$

Allora, se $\sigma(i) < \sigma(i+1)$ la i-esima foglia incontra la foglia numero $i+1$ al livello $\sigma(i+1)$, e viceversa se $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ la i-esima foglia incontra le foglie precedenti al livello $\sigma(i)$.

La degenerazione s_j inserisce il numero $n+1$ nell'immagine di una permutazione σ fra i termini $\sigma(j)$ e $\sigma(j+1)$. Chiaramente corrisponde ad aggiungere il livello più alto nell'albero associato y, ed una nuova foglia dopo la j-esima foglia, che la incontra a questo livello:



perciò produce lo stesso albero della degenerazione s_j che biforca la j-esima foglia di y. $\square$

9.3.3 - Proposizione. *Sia D una dialgebra, ed N una D-corappresentazione. Per ogni $n \geq 0$ la suriezione*

$$CS_n(D,N) \longrightarrow CY_n(D,N)$$

commuta con le facce e le degenerazioni, quindi è un morfismo di moduli pseudo-simpliciali. Inoltre, la mappa indotta sull'omologia

$$HS_n(D,N) \longrightarrow HY_n(D,N),$$

è un'isomorfismo per $n = 0, 1, 2$.

Dimostrazione. Sia $y \in Y_n$ l'albero associato alla permutazione $\sigma \in S_n$. Confrontando le definizioni (7.1.1) e (9.1.4) si vede che $\circ_i^\sigma = \circ_i^y$, perché

$$\sigma(i) < \sigma(i+1) \Longleftrightarrow \text{la } i\text{-esima foglia è orientata come } \backslash$$

$$\sigma(i) > \sigma(i+1) \Longleftrightarrow \text{la } i\text{-esima foglia è orientata come } /.$$

(confrontare con la dimostrazione del lemma precedente.) Perciò si ha

$$d_i^{\sigma}(\underline{a}) = d_i^{y}(\underline{a})$$

per ogni $\underline{a} \in N \otimes D^{\otimes n}$.

Confrontando le definizioni (8.1.3) e (9.2.3), è ovvio che $s_j^{\sigma}(\underline{a}) = s_j^{y}(\underline{a})$.

Infine, poiché per $n = 0, 1, 2$ gli insiemi $\tilde{Y}_n$ e Y_n coincidono, e per $n = 3$ l'insieme $\tilde{Y}_3$ si proietta su Y_3, si ha chiaramente un'isomorfismo sull'omologia di grado $0, 1$ e 2. □

Come contro-esempio al fatto che la mappa descritta sopra possa essere un'isomorfismo in tutte le dimensioni, mostriamo ora un calcolo facile.

9.3.4 - Omologia delle dialgebre abeliane. Sia D una dialgebra abeliana e consideriamo la corappresentazione triviale k e la corappresentazione simmetrica opposta D^{op}. Poiché nel complesso naturale di dialgebra CY, come nella sua variazione CS, tutte le facce sono mappe nulle, in entrambi i complessi tutte le catene sono dei cicli e non ci sono bordi. Perciò si ha

$$HHY_n(D) = k[Y_n] \otimes D^{\otimes n+1} \quad , \quad HY_n(D,k) = k[Y_n] \otimes D^{\otimes n}$$

e

$$HHS_n(D) = k[S_n] \otimes D^{\otimes n+1} \quad , \quad HS_n(D,k) = k[S_n] \otimes D^{\otimes n}$$

per ogni $n \geq 0$.

9.4 Teoremi principali sull'omologia simmetrica.

Dopo questa discussione, è evidente che tutti i teoremi dimostrati per l'omologia naturale delle dialgebre, basati sulla struttura pseudo-simpliciale dei moduli di catene, può essere estesa alla sua variazione HS. Li ricordiamo brevemente, poiché le dimostrazioni copiano perfettamente il caso precedente.

9.4.1 - Omologia simmetrica normalizzata. Data una dialgebra bar-unitaria D ed una corappresentazione unitaria N, si ha il sotto-complesso degli elementi degeneri di $CS_*(D,N)$,

$$DS_n(D,N) := \{s_j(\sigma, \underline{a}) \in CS_n(D,N) \mid \text{per ogni } (\sigma, \underline{a}) \in CS_{n-1}(D,N) \text{ e ogni degenerazione } s_j\}.$$

La famiglia di quozienti $\bar{C}S_n(D,N) := CS_n(D,N)/DS_n(D,N)$ forma anch'essa un complesso, la cui omologia è indicata con

$$\bar{H}S_n(D,N) := H_n(\bar{C}S_*(D,N), d).$$

Dal lemma (8.2.3) segue immediatamente:

9.4.2 - Proposizione. *Il complesso degli elementi degeneri $DS_*(D,N)$ è aciclico, e la proiezione canonica $CS_n(D,N) \longrightarrow \bar{C}S_n(D,N)$ induce un isomorfismo sull'omologia,*

$$HS_*(D,N) \cong \bar{H}S_*(D,N).$$

Come in (8.4.1), per le algebre associative unitarie si ha un isomorfismo fra l'omologia simmetrica e l'omologia di Hochschild.

9.4.3 - Teorema. *Sia A una algebra associativa unitaria ed M un bimodulo unitario su A. Allora l'omologia simmetrica di A a coefficienti in M è isomorfa all'omologia di Hochschild, cioè*

$$HS_n(A, M) \cong H_n(A, M),$$

per ogni $n \geq 0$.

9.4.4 - Osservazione. Questo teorema estende il teorema di Cuvier $HHS_n(A) \cong HH_n(A)$ per le algebre unitarie, [C], al caso di un modulo di coefficienti M diverso dall'algebra stessa. Cuvier ha costruito un'omotopia di catene, usando la mappa s descritta in (9.2.5), con lo stesso metodo usato in (8.4.2).

Una dimostrazione alternativa è stata data da J. Lodder [LO], il quale ha introdotto dei moduli multi-presimpliciali $P^m(A)$, mostrando che hanno una interpretazione geometrica riguardante il modello di James dello spazio classificante BG di un gruppo discreto, quando $A = \mathbf{Q}[G]$ è il suo anello di gruppo.

L'osservazione cruciale è che ogni $P^m(A)$ è isomorfo al prodotto tensoriale di due moduli multi-presimpliciali $k[S^m(A)]$ e $C^m(A, A)$, che hanno un'omologia conosciuta. Per le dialgebre, come abbiamo sottolineato dopo (8.4.1), il suo metodo non può essere applicato. Ciononostante, ha il vantaggio di mettere in evidenza le tre ipotesi basilari su cui si basa il risultato:

- il complesso $CS_*(A)$ è il *prodotto tensoriale* di due complessi,
- l'insieme pseudo-simpliciale delle permutazioni S_* è *aciclico*,
- il complesso $C_*(A)$ è *simpliciale*.

Nel caso delle dialgebre, abbiamo sostituito la terza ipotesi con un'altra condizione sufficiente (cioè, pseudo-simpliciale) che vale per le dialgebre bar-unitarie (ma non vale per le algebre non unitarie), ma non possiamo in alcun modo rimpiazzare la prima condizione, che invece continua a valere per le algebre non unitarie.

Analogamente a (8.5.1) si ottiene l'invarianza di Morita per l'omologia simmetrica.

9.4.5 - Teorema. *Sia D una dialgebra, ed N una D-corappresentazione. Consideriamo, per ogni numero naturale r, la dialgebra $M_r(D)$ delle matrici $r \times r$ a coefficienti in D e la sua corappresentazione $M_r(N)$. Se D ha una bar-unità, e N è una corappresentazione bar-unitaria, allora c'è un isomorfismo sull'omologia*

$$HS_n(M_r(D), M_r(N)) \cong HS_n(D, N),$$

per ogni $n \geq 0$.

Infine, mimando (8.6.1), otteniamo una forma debole della Formula di Künneth:

9.4.6 - Teorema. *Sia D una dialgebra con una corappresentazione N, e sia A un'algebra associativa con un bimodulo M. Se tutti questi spazi sono (bar-)unitari, si ha un isomorfismo sull'omologia*

$$HS_*(A \otimes D, M \otimes N) \cong HS_*(A, M) \otimes HS_*(D, N).$$

Chapter 10

Omologia di Leibniz delle dialgebre

10.1 Omologia di Leibniz e di dialgebra.

10.1.1 - Omologia di Leibniz. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Leibniz ed N una corappresentazione di $\mathfrak{g}$. Ricordiamo che il modulo delle n-catene di $\mathfrak{g}$ è il modulo tensoriale

$$CL_n(\mathfrak{g}, N) := N \otimes \mathfrak{g}^{\otimes n},$$

e l'operatore di bordo $d : N \otimes \mathfrak{g}^{\otimes n} \longrightarrow N \otimes \mathfrak{g}^{\otimes n-1}$ è dato dalla seguente formula:

$$\delta(x_0, ..., x_n) := (\llbracket x_0, x_1 \rrbracket, x_2, ..., x_n) + \textstyle\sum_{2\leq j\leq n} (-1)^j (\llbracket x_j, x_0 \rrbracket, x_1, ..., \widehat{x_j}, ..., x_n)$$
$$+ \textstyle\sum_{1\leq i<j\leq n} (-1)^{j+1} (x_0, ..., x_{i-1}, [x_i, x_j], ..., \widehat{x_j}, ..., x_n)$$

dove $x_0 \in N$. L'omologia di questo complesso,

$$HL_n(\mathfrak{g}, N) := H_n(CL_*(\mathfrak{g}, N), \delta),$$

si chiama *omologia di Leibniz* di $\mathfrak{g}$ a coefficienti in N.

Si noti che quando $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie, ed N è la corappresentazione simmetrica definita sul $\mathfrak{g}$-modulo, si ha $\llbracket x_j, x_0 \rrbracket = -\llbracket x_0, x_j \rrbracket$ per ogni $j \geq 2$, così ritroviamo la formula classica.

10.1.2 - La mappa di antisimmetrizzazione. Sia D una dialgebra e N una corappresentazione di D. Per ogni $n \geq 1$, definiamo la *mappa di antisimmetrizzazione* $\varepsilon_n : N \otimes D^{\otimes n} \longrightarrow k[S_n] \otimes N \otimes D^{\otimes n}$ come

$$\varepsilon_n(a_0, a_1, ..., a_n) := \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\sigma\ \sigma \otimes (a_0, a_{\sigma^{-1}(1)}, ..., a_{\sigma^{-1}(n)})$$

dove $(a_0, a_{\sigma^{-1}(1)}, ..., a_{\sigma^{-1}(n)}) =: \sigma\otimes(a_0, a_1, ..., a_n)$ è l'azione sinistra del gruppo delle permutazioni su $D^{\otimes n}$. (Si veda (1.3.4) in [L1].)

10.1.3 - Proposizione. *Sia D una dialgebra e N una corappresentazione di D. Consideriamo l'algebra di Leibniz D_L e la D_L-corepresentation N_L indotta su N. La mappa di antisimmetrizzazione $\varepsilon_n : CL_n(D_L) \longrightarrow CY_n(D)$ commuta con l'operatore di bordo, e stabilisce un morfismo di complessi. Perciò induce una trasformazione sull'omologia*

$$\varepsilon_* : HL_*(D_L, N_L) \longrightarrow HS_*(D, N).$$

Componendo questa mappa con la trasformazione naturale $HS_*(D,N) \longrightarrow HY_*(D,N)$ descritta in (9.3.3), abbiamo anche

$$\varepsilon_* : HL_*(D_L, N_L) \longrightarrow HY_*(D,N).$$

Per semplificare la dimostrazione, introduciamo alcune applicazioni utili.

10.1.4 - La mappa aggiunta. Sia D una dialgebra e N una corappresentazione di D. Per ogni $u \in D$, la mappa aggiunta $ad(u) : D \longrightarrow D$, $ad(u)(a) := [a,u] = a \dashv u - u \vdash a$ definita in (4.2.2) può essere estesa ad un'applicazione k-lineare $ad(u) : N \otimes D^{\otimes n} \longrightarrow N \otimes D^{\otimes n}$ ponendo

$$ad(u)(a_0, a_1, ..., a_n) := -(\llbracket u, a_0 \rrbracket, a_1, ..., a_n) + \sum_{1 \leq i \leq n} (a_0, ..., [a_i, u], ..., a_n),$$

ed anche ad un'applicazione k-lineare $ad(u) : k[S_n] \otimes N \otimes D^{\otimes n} \longrightarrow k[S_n] \otimes N \otimes D^{\otimes n}$ ponendo $ad(u)(\sigma \otimes \underline{a}) := \sigma \otimes ad(u)(\underline{a})$.

10.1.5 - Lemma. *Sia D una dialgebra ed N una corappresentazione di D. Per ogni $u \in D$, la mappa aggiunta $ad(u)$ soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) $\delta(a_0, a_1, ..., a_n, u) = (\delta(a_0, a_1, ..., a_n), u) + (-1)^n ad(u)(a_0, a_1, ..., a_n)$, dove δ è il bordo di Leibniz,

(ii) $\varepsilon_n ad(u) = ad(u) \varepsilon_n$, per ogni $n \geq 1$.

Dimostrazione. (i) Per definizione del differenziale di Leibniz si ha

$$\begin{aligned}
\delta(a_0, a_1, ..., a_n, u) &= (\llbracket a_0, a_1 \rrbracket, a_2, ..., a_n, u) + \textstyle\sum_{2 \leq j \leq n} (-1)^j (\llbracket a_j, a_0 \rrbracket, a_1, ..., \widehat{a_j}, ..., a_n, u) \\
&\quad + \textstyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{j+1} (a_0, ..., a_{i-1}, [a_i, a_j], ..., \widehat{a_j}, ..., a_n, u) \\
&\quad + (-1)^{n+1} (\llbracket u, a_0 \rrbracket, a_1, ..., a_n) + \textstyle\sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{(n+1)+1} (a_0, ..., a_{i-1}, [a_i, u], ..., a_n) \\
&= (\delta(a_0, a_1, ..., a_n), u) + (-1)^n [(\llbracket u, a_0 \rrbracket, a_1, ..., a_n) + \textstyle\sum_{1 \leq i \leq n} (a_0, ..., a_{i-1}, [a_i, u], ..., a_n) \\
&= (\delta(a_0, a_1, ..., a_n), u) + (-1)^n ad(u)(a_0, a_1, ..., a_n).
\end{aligned}$$

(ii) Analogamente, per definizione, otteniamo

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n ad(u)(a_0, a_1, ..., a_n) &= -\varepsilon_n (\llbracket u, a_0 \rrbracket, a_1, ..., a_n) + \sum_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_n (a_0, ..., a_{i-1}, [a_i, u], ..., a_n) \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \ \sigma \otimes (\llbracket u, a_0 \rrbracket, a_{\sigma^{-1}(1)}, ..., a_{\sigma^{-1}(n)}) \\
&\qquad + \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \ \sigma \otimes (a_0, a_{\sigma^{-1}(1)}, ..., [a_{\sigma^{-1}(\sigma(i))}, u], ..., a_{\sigma^{-1}(n)}) \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \ \sigma \otimes (\llbracket u, a_0 \rrbracket, a_{\sigma^{-1}(1)}, ..., a_{\sigma^{-1}(n)}) \\
&\qquad + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \ \sigma \otimes \sum_{1 \leq k = \sigma(i) \leq n} (a_0, a_{\sigma^{-1}(1)}, ..., [a_{\sigma^{-1}(k)}, u], ..., a_{\sigma^{-1}(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \ \sigma \otimes ad(u)(a_0, a_{\sigma^{-1}(1)}, ..., a_{\sigma^{-1}(n)}) \\
&= ad(u) \varepsilon_n (a_0, a_1, ..., a_n).
\end{aligned}$$

□

10.1.6 - Lemma. *Sia D una dialgebra ed N una corappresentazione di D. Per ogni $u \in D$, definiamo un'applicazione k-lineare $h(u) : k[S_n]N \otimes D^{\otimes n} \longrightarrow k[S_{n+1}]N \otimes D^{\otimes n+1}$ ponendo*

$$h(u)(\sigma \otimes (a_0, a_1, ..., a_n)) := \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i s_i(\sigma) \otimes (a_0, ..., a_i, u, ..., a_n).$$

Allora la mappa $h(u)$ soddisfa le seguenti proprietà:

(iii) $dh(u) + h(u)d = ad(u)$, dove d è il bordo di dialgebra,

(iv) $\varepsilon_{n+1}(a_0, a_1, ..., a_n, u) = (-1)^n h(u)\varepsilon_n(a_0, a_1, ..., a_n)$, per ogni $n \geq 1$.

Dimostrazione. (iii) Si osservi che $h(u) = \sum_{i=0}^n (-1)^i h_i(u)$, dove le mappe

$$h_i(u)(\sigma \otimes (a_0, a_1, ..., a_n)) := s_i(\sigma) \otimes (a_0, ..., a_i, u, ..., a_n)$$

soddisfano relazioni $d_i h_j(u) = h_{j-1} d_i$, per $i < j$, e $d_i h_j(u) = h_j d_{i-1}$, per $i > j+1$. Allora

$$dh(u) + h(u)d = d_0 h_0(u) + \sum_{i=1}^n [d_i h_i(u) - d_i h_{i-1}(u)] - d_{n+1} h_n(u),$$

e infine si ha:

$$\begin{aligned}
[dh(u) + h(u)d](\sigma \otimes \underline{a}) &= d_0 s_0(\sigma) \otimes (u \circ_i^{s_0(\sigma)} a_0, ..., a_n) + \sum_{i=1}^n d_i s_i(\sigma) \otimes (a_0, ..., a_i \circ_i^{s_i(\sigma)} u, ..., a_n) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n d_i s_{i-1}(\sigma) \otimes (a_0, ..., u \circ_i^{s_{i-1}(\sigma)} a_i, ..., a_n)] - d_{n+1} s_n(\sigma) \otimes (a_0 \circ_n^{s_n(\sigma)} u, ..., a_n) \\
&= \sigma \otimes (u \dashv\!\dashv a_0 - a_0 \vdash\!\vdash u, a_1, ..., a_n) + \sigma \otimes \sum_{i=1}^n (a_0, ..., a_i \dashv u - u \vdash a_i, ..., a_n) \\
&= \sigma \otimes ad(u)(\underline{a}).
\end{aligned}$$

(iv) Seguono immediatamente dalla definizione. □

Dimostrazione della proposizione (10.1.3). Mostriamo che la mappa di antisimmetrizzazione $\varepsilon_n : CL(D_L, N_L) \longrightarrow CS(D, N)$ è un morfismo di complessi, verificando, per induzione su n, che $d\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}\delta$. Per $n = 1$ si ha $\varepsilon_1 = id$ e

$$d\varepsilon_1(a_0, a_1) = a_1 \dashv\!\dashv a_0 - a_0 \vdash\!\vdash a_1 = [\![a_0, a_1]\!] = \delta(a_0, a_1).$$

Supponiamo che $d\varepsilon_n(\underline{a}) = \varepsilon_{n-1}\delta(\underline{a})$, dove $\underline{a} = (a_0, ..., a_n)$. Allora, per $n+1$, si ha:

$$\begin{aligned}
d\varepsilon_n(\underline{a}, u) &= (-1)^n dh(u)\varepsilon_n(\underline{a}) && \text{per la proprietà (iv)} \\
&= (-1)^n [ad(u) - h(u)d]\varepsilon_n(\underline{a}) && \text{per la proprietà (iii)} \\
&= (-1)^n ad(u)\varepsilon_n(\underline{a}) + (-1)^{n-1} h(u) d\varepsilon_n(\underline{a}) \\
&= (-1)^n ad(u)\varepsilon_n(\underline{a}) + (-1)^{n-1} h(u)\varepsilon_{n-1}\delta(\underline{a}) && \text{per ipotesi induttiva} \\
&= (-1)^n ad(u)\varepsilon_n(\underline{a}) + \varepsilon_n(\delta(\underline{a}), u) && \text{per la proprietà (iv)} \\
&= (-1)^n ad(u)\varepsilon_n(\underline{a}) + \varepsilon_n\delta(\underline{a}, u) - (-1)^n \varepsilon_n ad(u)(\underline{a}) && \text{per la proprietà (i)} \\
&= \varepsilon_n\delta(\underline{a}, u) && \text{per la proprietà (ii)}
\end{aligned}$$

□

10.1.7 - Proposizione. *Sia A un'algebra associativa, ed M un A-bimodulo. Allora c'è un diagramma commutativo sull'omologia*

$$\begin{array}{ccccc} HL_*(A_L, M_L) & \longrightarrow & HS_*(A,M) & \longrightarrow & HY_*(A,M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_*(A_L, M_L) & \longrightarrow & H_*(A,M) & = & H_*(A,M). \end{array}$$

Dimostrazione. Segue da (1.12) in [L-P], (1.3.5) in [L1], (9.3.3) e la proposizione (10.1.3). □

10.2 Omologia di Leibniz delle dialgebre di matrici.

La relazione fra l'omologia dell'algebra di Lie delle matrici e l'omologia dell'algebra dei coefficienti è un problema classico. Il maggior risultato, per le algebre associative unitarie, è il Teorema di Loday-Quillen-Tsygan ([L-Q], [T]), che mette in relazione l'omologia di Lie del limite induttivo $\mathfrak{gl}(A) = \mathfrak{gl}_{r\to\infty}(A)$ con l'omologia ciclica di A: c'è un isomorfismo di algebre di Hopf graduate

$$H_*(\mathfrak{gl}(A), k) \cong \bigwedge(HC_{*-1}(A)).$$

Per le algebre involutive, Loday e Procesi [L-Pr] hanno anche calcolato l'omologia di Lie delle matrici ortogonali in termini dell'omologia diedrale:

$$H_*(\mathfrak{o}(A), k) \cong \bigwedge(HD_{*-1}(A)),$$

e analogamente per le matrici simplettiche. Inoltre, poiché le algebre di Lie sono algebre di Leibniz antisimmetriche, Cuvier e Loday ([C], [L1]) hanno calcolato anche l'omologia di Leibniz delle matrici, ottenendo una relazione con l'omologia di Hochschild dell'algebra dei coefficienti:

$$HL_*(\mathfrak{gl}(A), k) \cong T(HH_{*-1}(A))).$$

Poiché le matrici con coefficienti in una dialgebra formano ancora una dialgebra (e quindi un'algebra di Leibniz), è naturale cercare di calcolare anche l'omologia di Leibniz della dialgebra di matrici.

10.2.1 - Algebra di Leibniz di matrici su una dialgebra. Sia D una dialgebra su k, e sia $\mathrm{M}_r(D)$ la dialgebra di matrici con coefficienti in D. Allora diamo al k-spazio vettoriale $\mathrm{M}_r(D)$ una struttura di algebra di Leibniz definendo il commutatore

$$[\alpha, \beta] := \alpha \dashv \beta - \beta \vdash \alpha$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathrm{M}_r(D)$, e la indichiamo con $\mathfrak{gl}_r(D)$. Infine consideriamo il limite induttivo $\mathfrak{gl}(D) = \mathfrak{gl}_{r\to\infty}(D)$ delle inclusioni $\mathfrak{gl}_r(D) \hookrightarrow \mathfrak{gl}_{r+1}(D)$.

10.2.2 - Teorema. *Sia D una dialgebra su k, munita di bar-unità. C'è un isomorfismo di spazi vettoriali graduati*

$$HL_*(\mathfrak{gl}(D), k) \cong T(HHS_*(D)[1]),$$

dove la notazione standard [1] *significa che il grado del complesso $CS_*(D)$ è scalato di 1, cioè $CS_n(D)[1] = CS_{n-1}(D)$.*

10.2.3 - Osservazione. B. Fresse ha recentemente mostrato in [Fr] che per ogni cooperad unitaria $\mathcal{P}$, se C è una $\mathcal{P}$-coalgebra connessa e graduata, munita di una struttura di gruppo, allora C è una $\mathcal{P}$-coalgebra graduata colibera. Ciò significa che $C = \bigwedge(\mathrm{Prim}C)$, quando $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$, e $C = T(\mathrm{Prim}C)$ quando $\mathcal{P} = \mathcal{L}eib^!$.

Ora, siccome la $\mathcal{P}$-omologia di matrici è una $\mathcal{P}^!$-coalgebra connessa e graduata di tipo gruppo, deve essere colibera, generata dagli elementi chiamati primitivi. Questo risultato, applicato alla coalgebra $C = H_*^{\mathcal{L}ie}(\mathfrak{gl}(A))$, dà $C = \bigwedge(\mathrm{Prim}C)$ (si ricordi che $\mathcal{L}ie^! = \mathcal{C}om$). Il Teorema di Loday-Quillen-Tsygan dice dunque che $\mathrm{Prim}C = HC_{*-1}(A)$.

Analogamente, per $C = H_*^{\mathcal{L}eib}(\mathfrak{gl}(D))$ (dove $H^{\mathcal{L}eib} = HL$), sappiamo che C deve essere della forma $T(\mathrm{Prim}C)$. Il nostro risultato dice più precisamente che $\mathrm{Prim}C = HHS_{*-1}(D)$.

Schema della dimostrazione. L'idea della dimostrazione è quella usata da Cuvier e Loday per le algebre associative. Si tratta di trovare un complesso $L_*(D)$ che ha la stessa omologia del complesso di Leibniz $CL_*(\mathfrak{gl}(D), k)$ ma sufficientemente piccolo da potersi confrontare, per mezzo del funtore tensoriale T, al complesso $CS_*(D)$ definito nel capitolo precedente (9.1.4). La dimostrazione è organizzata in tre punti principali. Prima troviamo il complesso $L_*(D)$ e mostriamo, in (10.2.4), che ha la stessa omologia di $CL_*(\mathfrak{gl}(D), k)$. Poi, in (10.2.12), troviamo la parte primitiva $P_*(D)$ di $L_*(D)$, e infine mostriamo, in (10.2.13), che i complessi $P_*(D)$ e $CS_*(D)$ sono isomorfi. $\square$

Il complesso dei coinvarianti.

Sia S_{n+1} il gruppo di permutazioni sugli $n+1$ elementi $0, 1, \ldots, n$, e sia U_{n+1} la classe di coniugazione del ciclo $\tau = \tau_n = (012\cdots n) \in S_{n+1}$. Per ogni $n \geq 0$, put $L_n(D) := k[S_{n+1}] \otimes D^{\otimes n+1}$, $P_n(D) := k[U_{n+1}] \otimes D^{\otimes n+1}$ e $C_n(D) := D^{\otimes n+1}$. Si hanno allora ovvie inclusioni di k-moduli

$$\begin{array}{ccccc} C_n(D) & \hookrightarrow & P_n(D) & \hookrightarrow & L_n(D) \\ \underline{a} & \mapsto & \tau \otimes \underline{a} & & \\ & & \omega \otimes \underline{a} & \mapsto & \omega \otimes \underline{a}. \end{array}$$

10.2.4 - Proposizione. *Sia D una dialgebra con bar-unità, allora si può rendere $L_*(D)$ un complesso tale che*

$$HL_*(\mathfrak{gl}(D), k) \cong H_*(L(D)[1]).$$

Dimostrazione. Ricordiamo che l'omologia di Leibniz $HL_*(\mathfrak{gl}_r(D), k)$ di $\mathfrak{gl}_r(D)$ (a coefficienti nel modulo triviale k) è l'omologia del complesso $(CL_*(\mathfrak{gl}_r(D), k), d)$:

$$\cdots \longrightarrow \mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n} \longrightarrow \mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathfrak{gl}_r(D) \longrightarrow k,$$

dove il differenziale di Leibniz $\delta : \mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n} \longrightarrow \mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n-1}$ è definito, per ogni $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n}$, da

$$\delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^j (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, [\alpha_i, \alpha_j], \ldots, \widehat{\alpha_j}, \ldots, \alpha_n) \tag{10.1}$$

e $\delta(\alpha) = 0$ per $\alpha \in \mathfrak{gl}_r(D)$.

Indichiamo con $\mathfrak{gl}_r$ lo spazio vettoriale $\mathfrak{gl}_r(k)$, e consideriamo per ogni fissato r la struttura naturale di $\mathfrak{gl}_r$-modulo data su $\mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n}$ dall'azione destra

$$[(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), v] := \sum_{k=1}^{n} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, [\alpha_k, v], \ldots, \alpha_n)$$

dove, per ogni $v \in \mathfrak{gl}_r$ e $\alpha_k \in \mathfrak{gl}_r(D)$ l'azione destra

$$([\alpha_k, v])_{ij} := (\alpha_k \cdot v - v \cdot \alpha_k)_{ij} = \sum_l ((\alpha_k)_{il} \cdot v_{lj} - v_{il} \cdot (\alpha_k)_{lj})$$

è definita in termini dell'azione sinistra e destra di k su D. Poiché D ha una bar-unità 1, anche $\mathrm{M}_r(D)$ ha una bar-unità: la matrice $1 = (\delta_{ij})$. Il lemma (10.2.5) permette di immergere $\mathfrak{gl}_r(k)$ in $\mathfrak{gl}_r(D)$, identificando ogni matrice $v \in \mathfrak{gl}_r$ con la matrice $v \cdot 1 = 1 \cdot v \in \mathfrak{gl}_r(D)$, in modo tale che l'azione di $\mathfrak{gl}_r$ su $\mathfrak{gl}_r(D)$ appaia come restrizione dell'azione aggiunta dell'algebra di Leibniz $\mathfrak{gl}_r(D)$.

La riduttività di $\mathfrak{gl}_r(k)$ assicura che $\mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n}$ sia completamente riducibile come $\mathfrak{gl}_r$-modulo, per ogni $n \geq 0$. Così possiamo scomporre $\mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n}$ nella somma diretta

$$\mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n} = (\mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n})_{\mathrm{gl}_r} \oplus Q_n,$$

dove $(\mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n})_{\mathrm{gl}_r}$ è lo spazio dei coinvarianti di $\mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n}$, e Q_n è la somma diretta delle rimanenti componenti isotipiche nella decomposizione isotipica di $\mathfrak{gl}_r(D)^n$ come $\mathfrak{gl}_r$-modulo. Il punto cruciale è che considerare lo spazio dei coinvarianti non cambia l'omologia, come si mostra nel lemma (10.2.6).

Se ne deduce quindi che la famiglia di proiezioni

$$\mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n} \longrightarrow (\mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n})_{\mathrm{gl}_r}, \quad \text{for } n \geq 0,$$

induce un quasi-isomorfismo di complessi. Questo permette di scrivere i seguenti isomorfismi di omologia,

$$HL_n(\mathfrak{gl}_r(D), k) := H_n(CL_*(\mathfrak{gl}_r(D), k), d) \cong H_n(CL_*(\mathfrak{gl}_r(D), k)_{\mathrm{gl}_r}, \tilde{d})$$

dove l'ultimo differenziale $\tilde{d}$ è ottenuto dal differenziale di Leibniz d passando al quoziente $\mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n} \longrightarrow (\mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n})_{\mathrm{gl}_r}$.

Il secondo passo è solo un'applicazione della theoria degli invarianti, e ripete perfettamente il caso di Lie e di Leibniz per le algebre associative. Ricordiamo brevemente la sequenza di isomorfismi sulle catene:

$$(\mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n})_{\mathrm{gl}_r} \cong (\mathfrak{gl}_r{}^{\otimes n} \otimes D^{\otimes n})_{\mathrm{gl}_r} \cong (\mathfrak{gl}_r{}^{\otimes n})_{\mathrm{gl}_r} \otimes D^{\otimes n} \cong I_{n,r} \otimes D^{\otimes n},$$

dove l'ideale $I_{n,r}$ di $k[S_n]$ (la cui definizione può essere trovata in [L1], (9.2.6)) coincide con $k[S_n]$ per $r \geq n$. Perciò, considerando il limite induttivo $\mathfrak{gl}(D)$, si ha un isomorfismo sull'omologia

$$HL_*(\mathfrak{gl}(D), k) \cong H_*(k[S_n] \otimes D^{\otimes n}, \tilde{d}) = H_*(L(D)[1]),$$

e questo prova la proposizione. □

10.2.5 - Lemma. *Sia D una dialgebra con a bar-unità 1, allora*

$$[\alpha, v] = [\alpha, v \cdot 1]$$

per ogni $\alpha \in \mathfrak{gl}_r(D)$ e $v \in \mathfrak{gl}_r$.

Dimostrazione. Si noti che questa uguaglianza non è banale: nel lato sinistro il commutatore è l'azione di $\mathfrak{gl}_r$ su $\mathfrak{gl}_r(D)$, mentre nel lato destro il commutatore è quello di Leibniz di $\mathfrak{gl}_r(D)$.

A sinistra si ha chiaramente

$$([\alpha, v])_{ij} = \sum_k (\alpha_{ik} \cdot v_{kj} - v_{ik} \cdot \alpha_{kj}).$$

A destra, prima si noti che $v \cdot 1$ è una matrice di $\mathfrak{gl}_r(D)$ con coefficienti

$$(v \cdot 1)_{ij} = \sum_l v_{il} \cdot \delta_{lj} = v_{ij} \cdot 1,$$

perciò si ha:

$$\begin{aligned} ([\alpha, v \cdot 1])_{ij} &= \sum_k [\alpha_{ik} \dashv (v \cdot 1)_{kj} - (v \cdot 1)_{ik} \vdash \alpha_{kj}] \\ &= \sum_k (\alpha_{ik} \dashv v_{kj} \cdot 1 - v_{ik} \cdot 1 \vdash \alpha_{kj}) \\ &= \sum_k (\alpha_{ik} \cdot v_{kj} \dashv 1 - 1 \vdash v_{ik} \cdot \alpha_{kj}) \\ &= \sum_k (\alpha_{ik} \cdot v_{kj} - v_{ik} \cdot \alpha_{kj}), \end{aligned}$$

e l'uguaglianza è provata. □

10.2.6 - Lemma. *Per ogni $n \geq 0$ l'azione di $\mathfrak{gl}_r$ su $\mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n}$ commuta con il differenziale di Leibniz su $\mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n}$, passando al quoziente nell'omologia. L'azione indotta di $\mathfrak{gl}_r$ sull'omologia di Leibniz $HL_n(\mathfrak{gl}_r(D))$ è triviale.*

Dimostrazione. Dal lemma (10.2.5) segue la compatibilità del differenziale di Leibniz con l'azione aggiunta di $\mathfrak{gl}_r(D)$ su $\mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n}$, e quindi anche di $\mathfrak{gl}_r$, cioè che

$$d[\alpha, v] = [d\alpha, v]$$

per ogni $\alpha \in \mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n}$ e $v \in \mathfrak{gl}_r$ (si veda (10.6.3.0) in [L1]). Per provare la seconda asserzione, definiamo, per ogni $v \in \mathfrak{gl}_r$, una mappa $h(v) : \mathfrak{gl}(D)^{\otimes n} \longrightarrow \mathfrak{gl}(D)^{\otimes n+1}$ come

$$h(v)(\alpha) \ := \ (-1)^{n-1} \alpha \otimes (v \cdot 1).$$

È facile vedere che l'identità

$$d(h(v)(\alpha)) + h(v)(d\alpha) = [\alpha, v]$$

vale per ogni $\alpha \in \mathfrak{gl}_r(D)^{\otimes n}$. Perciò la mappa $h(v)$ costituisce un'omotopia fra $[-, v]$ e 0. In altre parole, l'azione $[-, v]$ è triviale sull'omologia. □

Il complesso dei primitivi.

Per poter determinare gli elementi primitivi del complesso $L_*(D)$, è utile una descrizione esplicita del suo differenziale. Per prima cosa introduciamo qualche notazione sulle permutazioni.

10.2.7 - Notazioni. Sia σ una permutazione sugli $n+1$ elementi $\{0, 1, ..., n\}$. Per ogni indice $i \in \{0, ..., n\}$, definiamo le permutazioni $\sigma^{(\pm i)}$ su n elementi nel modo seguente.

- Per ogni indice i tale che $i < \sigma(i)$, sia $\sigma^{(+i)}$ la permutazione sugli n elementi $\{0, 1, ..., \widehat{\sigma(i)}, ..., n\}$ che manda $j \neq i$ to $\sigma(j)$, e i to $\sigma^2(i)$.

- Per ogni indice i tale che $i < \sigma^{-1}(i)$, sia $\sigma^{(-i)}$ la permutazione su $\{0, 1, ..., \widehat{\sigma^{-1}(i)}, ..., n\}$ che assegna il valore di σ (chiaramenta saltando il valore i).

Infine riordiniamo i numeri da 0 a $n-1$.

Per esempio dal ciclo $\sigma = (0231)$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
0 < \sigma(0) = 2 &\implies \sigma^{(+0)} = (031)\text{su } \{0,1,3\} \implies \sigma^{(+0)} = (021)\text{su } \{0,1,2\}\\
0 < \sigma^{-1}(0) = 1 &\implies \sigma^{(-0)} = (023)\text{su } \{0,2,3\} \implies \sigma^{(-0)} = (012)\text{su } \{0,1,2\}\\
1 > \sigma(1) = 0 &\implies \sigma^{(+1)}\text{non è definita}\\
1 < \sigma^{-1}(1) = 3 &\implies \sigma^{(-1)} = (021)\text{su } \{0,1,2\}\\
2 < \sigma(2) = 3 &\implies \sigma^{(+2)} = (021)\text{su } \{0,1,2\}\\
2 > \sigma^{-1}(2) = 0 &\implies \sigma^{(-2)}\text{non è definita}\\
3 > \sigma(3) = 1 &\implies \sigma^{(+3)}\text{non è definita}\\
3 > \sigma^{-1}(3) = 2 &\implies \sigma^{(-3)}\text{non è definita.}
\end{aligned}$$

10.2.8 - Lemma. *Il complesso $L_*(D)$ ha differenziale $\tilde{d} : k[S_{n+1}] \otimes D^{\otimes n+1} \longrightarrow k[S_n] \otimes D^n$ dato da:*

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(\sigma \otimes (a_0, \ldots, a_n)) = &\sum_{0 \leq i < \sigma(i) \leq n} (-1)^{\sigma(i)+1}\, \sigma^{(+i)} \otimes (a_0, \ldots, a_i \dashv a_{\sigma(i)}, \ldots, \widehat{a_{\sigma(i)}}, \ldots, a_n)\\
&- \sum_{0 \leq i < \sigma^{-1}(i) \leq n} (-1)^{\sigma^{-1}(i)+1}\, \sigma^{(-i)} \otimes (a_0, \ldots, a_{\sigma^{-1}(i)} \vdash a_i, \ldots, \widehat{a_{\sigma^{-1}(i)}}, \ldots, a_n).
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Il differenziale $\tilde{d}$ sul complesso $L_*(D)$ può essere esplicitamente trovato applicando gli isomorfismi descritti nella dimostrazione della proposizione (10.2.4). Più precisamente, per ogni $\sigma \otimes (a_0, \ldots, a_n) \in k[S_{n+1}] \otimes D^{\otimes n+1}$, sia $E^{a_0}_{0\sigma(0)} \otimes \cdots \otimes E^{a_n}_{n\sigma(n)}$ un'elemento rappresentativo in $\mathfrak{gl}(D)^{\otimes n+1}$ della classe della sua immagine in $(\mathfrak{gl}(D)^{\otimes n+1})_{\mathfrak{gl}_r}$ nell'isomorfismo descritto sopra. Calcoliamo il suo differenziale di Leibniz, osservando che, con la numerazione scalata, l'elemento

$E^{a_i}_{i\sigma(i)}$ ora corrisponde all'elemento α_{i+1} della formula (10.1). Si ha

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(\sigma \otimes (a_0, \ldots, a_n)) &:= d(E^{a_0}_{0\sigma(0)} \otimes \cdots \otimes E^{a_n}_{n\sigma(n)}) \\
&= \sum_{0 \le i < j \le n} (-1)^{j+1} E^{a_0}_{0\sigma(0)} \otimes \cdots \otimes [E^{a_i}_{i\sigma(i)}, E^{a_j}_{j\sigma(j)}] \otimes \cdots \otimes \widehat{E^{a_j}_{j\sigma(j)}} \otimes \cdots \otimes E^{a_n}_{n\sigma(n)}) \\
&= \sum_{0 \le i < j \le n} (-1)^{j+1} E^{a_0}_{0\sigma(0)} \otimes \cdots \otimes E^{a_i}_{i\sigma(i)} \dashv E^{a_j}_{j\sigma(j)} \otimes \cdots \otimes \widehat{E^{a_j}_{j\sigma(j)}} \otimes \cdots \otimes E^{a_n}_{n\sigma(n)}) \\
&- \sum_{0 \le i < j \le n} (-1)^{j+1} E^{a_0}_{0\sigma(0)} \otimes \cdots \otimes E^{a_j}_{j\sigma(j)} \vdash E^{a_i}_{i\sigma(i)} \otimes \cdots \otimes \widehat{E^{a_j}_{j\sigma(j)}} \otimes \cdots \otimes E^{a_n}_{n\sigma(n)}) \\
&= \sum_{0 \le i < \sigma(i) \le n} (-1)^{\sigma(i)+1} E^{a_0}_{0\sigma(0)} \otimes \cdots \otimes E^{a_i \dashv a_{\sigma(i)}}_{i\sigma^2(i)} \otimes \cdots \otimes \widehat{E^{a_j}_{\sigma(i)\sigma^2(i)}} \otimes \cdots \otimes E^{a_n}_{n\sigma(n)}) \\
&- \sum_{0 \le i < \sigma^{-1}(i) \le n} (-1)^{\sigma^{-1}(i)+1} E^{a_1}_{0\sigma(0)} \otimes \cdots \otimes E^{a_{\sigma^{-1}(i)} \vdash a_i}_{\sigma^{-1}(i)\sigma(i)} \otimes \cdots \otimes \widehat{E^{a_{\sigma^{-1}(i)}}_{\sigma^{-1}(i)i}} \otimes \cdots \otimes E^{a_n}_{n\sigma(n)}).
\end{aligned}$$

Allora prendendo la classe dell'elemento E^a_{ij}, e usando le notazioni sulle permutazioni descritte in (10.2.7), otteniamo la formula finale. $\square$

10.2.9 - Lemma. *Per ogni $n \geq 0$ le inclusioni di moduli $C_n(D) \hookrightarrow P_n(D) \hookrightarrow L_n(D)$ commutano con il differenziale $\tilde{d}$ su $L_n(D)$, perciò $P_*(D)$ e $C_*(D)$ sono sottocomplessi di $L_*(D)$, con differenziale $\tilde{b}$ dato dalla restrizione di $\tilde{d}$.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare innanzitutto che per ogni $\omega \otimes \underline{a} \in P_n(D)$, cioè $\omega = \sigma^{-1}\tau_n\sigma \in U_{n+1}$ con $\sigma \in S_{n+1}$ e $\tau_n = (01\cdots n)$, l'elemento $\tilde{d}(\omega \otimes \underline{a})$ è contenuto in $P_{n-1}(D)$, e poi che quando $\omega = \tau_n$ allora $\tilde{d}(\tau_n \otimes \underline{a}) = \tau_{n-1} \otimes \underline{a}'$.

Si noti subito che U_{n+1} è il sottoinsieme di S_{n+1} contenente tutti i cicli di lunghezza massima $n+1$, perciò la permutazione di un'elemento $\omega \otimes \underline{a}$ in $P_n(D) = k[U_{n+1}] \otimes D^{\otimes n+1}$ si scrive come il ciclo $\omega = (\omega_0\omega_1 \cdots \omega_n)$. Supponenddo che $\omega_0 = 0$, sappiamo anche che $\omega = \sigma^{-1}\tau_n\sigma$, dove ponendo $\sigma(i) := \omega_i$, per $i = 0, 1, \ldots, n$, si definisce una permutazione $\sigma \in S_{n+1}$ che infatti appartiene a S_n, visto che $\sigma(0) = \omega_0 = 0$. Con questa notazione, il differenziale $\tilde{d}$, descritto nel lemma (10.2.8), su $\omega \otimes \underline{a}$ diventa

$$\tilde{d}(\omega \otimes \underline{a}) = \sum_{0 \le \omega_i < \omega_j \le n} (-1)^{\omega_j+1} E^{a_{\omega_0}}_{\omega_0\omega_1} \otimes \cdots \otimes [E^{a_{\omega_i}}_{\omega_i\omega_{i+1}}, E^{a_{\omega_j}}_{\omega_j\omega_{j+1}}] \otimes \cdots \otimes \widehat{E^{a_{\omega_j}}_{\omega_j\omega_{j+1}}} \otimes \cdots \otimes E^{a_n}_{n\sigma(n)}.$$

Gli addendi sono differenti da zero solo se contengono uno dei due commutatori

$$[E^{a_{\omega_i}}_{\omega_i\omega_{i+1}}, E^{a_{\omega_{i+1}}}_{\omega_{i+1}\omega_{i+2}}] = E^{a_{\omega_i} \dashv a_{\omega_{i+1}}}_{\omega_i\omega_{i+2}} \tag{10.2}$$

o

$$[E^{a_{\omega_{i+1}}}_{\omega_{i+1}\omega_{i+2}}, E^{a_{\omega_i}}_{\omega_i\omega_{i+1}}] = -E^{a_{\omega_i} \vdash a_{\omega_{i+1}}}_{\omega_i\omega_{i+2}}, \tag{10.3}$$

che è piazzato nella posizione $\min(w_i, w_{i+1})$. Perciò $\tilde{d}(\omega \otimes \underline{a})$ è della forma

$$\sum_{0 \le \omega_i < \omega_j \le n} (-1)^{\omega_j+1} E^{a_{\omega_0}}_{\omega_0\omega_1} \otimes \cdots \otimes \pm E^{a_{\omega_i} \star a_{\omega_{i+1}}}_{\omega_i\omega_{i+2}} \otimes \cdots \otimes E^{a_n}_{n\sigma(n)},$$

dove $\star$ significa $\dashv$ or $\vdash$. Pertanto, scritto come una somma di elementi di $k[S_n] \otimes D^{\otimes n}$, $\tilde{d}(\omega \otimes \underline{a})$ contiene permutazioni ottenute dal ciclo ω di lunghezza $n+1$ cancellando il termine $\min(\omega_i, \omega_{i+1})$, che sono infatti cicli di lunghezza n. Questo prova che $\tilde{d}(\omega \otimes \underline{a}) \in k[U_n] \otimes D^{\otimes n} = P_{n-1}(D)$.

In particolare, quando $\omega = \tau_n$, si ha $\omega_i = i$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n$. Perciò $\omega_i = i < i+1 = \omega_{i+1}$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n-1$, e $\omega_n = n > 0 = \omega_{n+1}$. Allora $\tilde{d}(\tau_n \otimes \underline{a})$ contiene i cicli $(01 \cdots \widehat{i+1} \cdots n)$, per $i = 0, \ldots, n-1$, e $(01 \cdots n-1)$, che sono tutti τ_{n-1} dopo aver riordinato i numeri. Questo prova che $\tilde{d}(\tau \otimes \underline{a}) \in k \cdot \tau \otimes D^{\otimes n} = C_{n-1}(D)$. □

10.2.10 - Corollario. *Il complesso $P_*(D)$ è presimpliciale, con le seguenti facce $\tilde{d}_i : k[U_{n+1}] \otimes D^{\otimes n+1} \longrightarrow k[U_n] \otimes D^n$. Per ogni $\omega \otimes \underline{a} \in P_n(D)$,*

$$\tilde{d}_i(\omega \otimes \underline{a}) = \operatorname{sgn}(i, \omega)\; d_i(\omega) \otimes d_i^{\omega}(\underline{a}),$$

dove

- $\operatorname{sgn}(i, \omega) = (-1)^i \cdot (-1)^{\max(\omega_i, \omega_{i+1}+1)} \cdot \varepsilon_i^{\omega}$, *con*

$$\varepsilon_i^{\omega} := \begin{cases} + & , \textit{ se } \omega_i < \omega_{i+1} \\ - & , \textit{ se } \omega_i > \omega_{i+1} \end{cases}$$

- *il ciclo $d_i(\omega) = (\overline{\omega}_0 \overline{\omega}_1 \cdots \overline{\omega}_{n-1})$ si ottiene cancellando il termine $\max(\omega_i, \omega_{i+1})$ e riordinando i numeri da 0 to $n-1$:*

$$\overline{\omega}_k = \begin{cases} \omega_k & , \textit{ se } \omega_k < \max(\omega_i, \omega_{i+1}) \\ \omega_k - 1 & , \textit{ se } \omega_k > \max(\omega_i, \omega_{i+1}) \end{cases}$$

- *l'elemento $d_i^{\omega}(\underline{a})$ si ottiene sostituendo il termine $a_{\min(\omega_i, \omega_{i+1})}$ con il termine $a_{\omega_i} \circ_i^{\omega} a_{\omega_{i+1}}$, nella posizione $\min(\omega_i, \omega_{i+1})$, dove $\circ_i : U_{n+1} \longrightarrow \{\dashv, \vdash\}$ è l'applicazione definita da*

$$\circ_i^{\omega} := \begin{cases} \dashv, & \textit{se } \omega_i < \omega_{i+1}, \\ \vdash, & \textit{se } \omega_i > \omega_{i+1}. \end{cases}$$

  e cancellando il termine $a_{\max(\omega_i, \omega_{i+1})}$ nella posizione $\max(\omega_i, \omega_{i+1})$. In conclusione:

$$d_i^{\omega}(\underline{a}) = (a_0, ..., a_{\omega_i} \circ_i^{\omega} a_{\omega_{i+1}}, ..., a_n).$$

Dimostrazione. Il differenziale $\tilde{b}$ su $P_*(D)$ è descritto nel lemma (10.2.9). È chiaro che $\tilde{b}(\omega \otimes \underline{a})$ può essere scritto come una somma al variare degli indici $i = 0, ..., n$. Gli addendi corrispondenti ad un dato i contengono uno dei due commutatori (10.2) or (10.3), a seconda di quale dei due casi, $\omega_i < \omega_{i+1}$ o $\omega_{i+1} < \omega_i$, valgono per i. Allora è facile verificare che questi addendi sono precisamente $(-1)^i$ per la faccia data sopra. □

10.2.11 - Osservazione. Anche il complesso $C_*(D)$ è pre-simpliciale. Le sue facce sono

$$\tilde{d}_i(\underline{a}) = \begin{cases} (a_0, \ldots, a_i \dashv a_{i+1}, \ldots, a_n) & , \text{ per } i = 0, ..., n-1, \\ (a_n \vdash a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) & , \text{ per } i = n. \end{cases}$$

Perciò quando i due prodotti $\dashv$ e $\vdash$ coincidono, e D è un'algebra associativa A, il complesso $(C_*(A), \tilde{b})$ è il complesso di Hochschild di A a coefficienti in A.

Come abbiamo osservato in (9.4.4), Cuvier ha mostrato che se A ha un'unità, allora l'inclusion $C_*(A) \hookrightarrow P_*(A)$ è un quasi-isomorfismo di complessi. Abbiamo anche già osservato che la sua dimostrazione non può essere estesa alle algebre non unitarie, e nemmeno alle dialgebre anche con bar-unità.

Comunque, uno può dare una descrizione dettagliata della relazione fra il complesso $C_*(D)$ ed il complesso di dialgebra $CY_*(D)$. Nel capitolo (12) mostriamo che in generale $CY_*(D)$ è il complesso totale di un bicomplesso dove $C_*(D)$ è la prima colonna. Poi, come contro-esempio all'isomorfismo dato sopra per un'algebra associativa non unitaria, si mostra che per l'algebra non unitaria libera $\overline{T}(V)$ si ha

$$HHY_2(\overline{T}(V)) = V^{\otimes 3}, \quad \text{mentre} \quad HH_2(\overline{T}(V)) = 0.$$

10.2.12 - Proposizione. *Sia D una dialgebra, e $L_*(D)$, $P_*(D)$ il complesso definito sopra. Allora*

$$L_*(D)[1] \cong T(P_*(D)[1]).$$

Dimostrazione. L'isomorfismo sopra non coinvolge esplicitamente la struttura di dialgebra di D eccetto che nei bordi. La formula seguente

$$T(\tilde{b})(\sigma \otimes \underline{a}) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{N_{k-1}} (\omega^{(1)} \otimes \underline{a}^{(1)}) \otimes \cdots \otimes \tilde{b}(\omega^{(k)} \otimes \underline{a}^{(k)}) \otimes \cdots \otimes (\omega^{(m)} \otimes \underline{a}^{(m)})$$

mostra che $T(\tilde{b})$ non dipende dall'esplicita azione di $\tilde{b}$. Poiché $\tilde{b}$ su $P_*(D)$ è definito come restrizione di $\tilde{d}$ su $L_*(D)$, è chiaro che i differenziali $\tilde{d}$ e $T(\tilde{b})$ si corrispondono nel morfismo di catene. $\square$

Isomorfismo con il complesso simmetrico.

Per ogni numero naturale n, consideriamo l'azione sinistra di S_n su $D^{\otimes n+1}$ data da

$$\sigma^{-1} \cdot (a_0, a_1, ..., a_n) = (a_0, a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)}).$$

Se $\omega = (\omega_0, \omega_1, ..., \omega_n) \in U_{n+1}$ è un ciclo con $\omega_0 = 0$, e $\sigma \in S_n$ è la permutazione $\sigma(i) := \omega_i$, per $i = 1, ..., n$, che corrisponde univocamente a ω, allora l'azione di S_n su $D^{\otimes n+1}$ si legge

$$\sigma^{-1} \cdot (a_0, a_1, ..., a_n) = (a_{\omega_0}, a_{\omega_1}, ..., a_{\omega_n}).$$

Sia D una dialgebra, e siano $CS_*(D)$, $P_*(D)$ i complessi definiti sopra. Definiamo un'applicazione

$$\varphi : P_*(D) \longrightarrow CS_*(D)$$

per ogni $n \geq 0$ e $\omega \otimes \underline{a} \in k[U_{n+1}] \otimes D^{\otimes n+1}$, con

$$\varphi(\omega \otimes \underline{a}) := \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \sigma \otimes \sigma^{-1} \cdot \underline{a},$$

dove $\sigma \in S_n$ è la permutazione che corrisponde al ciclo ω.

10.2.13 - Proposizione. *Sia D una dialgebra. Allora $\varphi : P_*(D) \longrightarrow CS_*(D)$ è un isomorfismo di complessi. Perciò*

$$H_*(P(D)) \cong HHS_*(D).$$

Dimostrazione. Poiché φ è ovviamente un isomorfismo di k-moduli per ogni $n \geq 0$, rimane solo da mostrare che commuta con i differenziali, cioè che $d\varphi = \varphi\tilde{d}$. Mostriamo di più, cioè che $d_i\varphi = \varphi\tilde{d}_i$ vale per ogni $i = 0, ..., n$.

Sia $\omega \otimes \underline{a}$ un elemento di $k[U_{n+1}] \otimes D^{\otimes n+1}$. Da un lato abbiamo:

$$\begin{aligned} d_i\varphi(\omega \otimes \underline{a}) &= \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot d_i(\sigma \otimes \sigma^{-1} \cdot \underline{a}) \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot d_i(\sigma) \otimes d_i^\sigma(\sigma^{-1} \cdot \underline{a}), \end{aligned}$$

e dall'altro:

$$\begin{aligned} \varphi\tilde{d}_i(\omega \otimes \underline{a}) &= \operatorname{sgn}(\omega, i) \cdot \varphi(d_i(\omega) \otimes \tilde{d}_i^\omega(\underline{a})) \\ &= \operatorname{sgn}(\omega, i)\operatorname{sgn}(d_i\omega) \cdot \sigma' \otimes (\sigma')^{-1} \cdot \tilde{d}_i^\omega(\underline{a}), \end{aligned}$$

dove $\sigma' = d_i(\sigma)$ è la permutazione associata al ciclo $d_i(\omega)$. Rimane solo da verificare che

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\omega, i) \cdot \operatorname{sgn}(d_i\omega)$$

e

$$d_i^\sigma(\sigma^{-1} \cdot \underline{a}) = (\sigma')^{-1} \cdot \tilde{d}_i^\omega(\underline{a}).$$

Poiché la prima uguaglianza non dipende dalla struttura di dialgebra, ed è stata dimostrata da Lodder in [Lo], lemma (2.4), rimane solo da verificare la seconda.

In entrambi i lati l'operazione consiste di due passi, compiuti nei due possibili ordini. I due passi sono: moltiplicazione dei due elementi a_{ω_i}, $a_{\omega_{i+1}}$, e riordinamento della sequenza $(a_0, ..., a_{\sigma(j)}, ..., a_{\sigma(n)})$ nella sequenza $(a_{\omega_0}, ..., a_{\omega_j}, ..., a_{\omega_n})$. In entrambi i lati otteniamo il termine

$$(a_{\omega_0}, ..., a_{\omega_i} \circ_i^\sigma a_{\omega_{i+1}}, ..., a_{\omega_n}).$$

Questo completa la dimostrazione. $\square$

Chapter 11

Bicomplesso degli alberi orientati

La dimostrazione dei principali teoremi sull'omologia delle dialgebre che enunciamo nel prossimo capitolo, come l'interpretazione Tor e l'isomorfismo con l'omologia di Hochschild per le algebre associative, fa uso di un'attenta analisi delle proprietà combinatoriche degli insiemi degli alberi binari. Queste possono essere riassunte nella descrizione del bicomplesso degli alberi orientati, che presentiamo in questo capitolo.

11.1 Alberi orientati.

11.1.1 - Alberi binari orientati. Per ogni coppia di numeri naturali p, q, sia $Y_{p,q}$ l'insieme dei $(p+q+1)$-alberi con p foglie orientate come \ (esclusa la foglia 0), e q foglie orientate come / (esclusa l'ultima). Allora chiaramente, per ogni $n \geq 1$, si ha

$$Y_n = \bigcup_{p+q+1=n} Y_{p,q}.$$

Per esempio:

$$Y_1 = Y_{0,0}, \quad Y_2 = Y_{1,0} \cup Y_{0,1}, \quad Y_3 = Y_{2,0} \cup Y_{1,1} \cup Y_{0,2}.$$

L'*orientazione* di un n-albero è specificata dalla componente $Y_{p,q} \subset Y_n$ a cui appartiene l'albero. Si noti che, per ogni $p, q \geq 0$, l'insieme $Y_{p,0}$ (risp. $Y_{0,q}$) contiene solo un'albero (risp.), chiamato *albero a pettine*.

11.1.2 - Lemma. *Indichiamo con $c_{p,q}$ la cardinalità dell'insieme $Y_{p,q}$. Soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $c_{0,0} = 1$*;*
2. *per ogni* $p \geq 0$*,* $c_{p,0} = 1$*; per ogni* $q \geq 0$*,* $c_{0,q} = 1$*;*
3. *per ogni* $p, q \geq 1$*,* $c_{p,q} = c_{p-1,q} + c_{p,q-1} + \sum_{\substack{p_1+p_2=p-1\\ q_1+q_2=q-1}} c_{p_1,q_1} \cdot c_{p_2,q_2}$

Dimostrazione. 1. Quando $p = q = 0$, esiste solo uno $(0,0)$-albero, cioè . Perciò $c_{0,0} = 1$.

2. Quando $p > 0$ e $q = 0$, esiste solo un $(p,0)$-albero, l'albero a pettine . Analogamente, quando $p = 0$ e $q > 0$, esiste solo uno $(0,q)$-albero, l'albero a pettine . Perciò $c_{p,0} = 1$ per ogni $p > 0$ e $c_{0,q} = 1$ per ogni $q > 0$.

3. Quando $p, q \geq 1$, ogni (p,q)-albero y può avere una delle tre seguenti forme:

- $y = {}^{y_1}\!\curlyvee^{y_2}$, dove, per $i = 1, 2$, y_i è un (p_i, q_i) albero tale che $p_1 + p_2 = p - 1$ e $q_1 + q_2 = q - 1$;
- $y = {}^{y_1}\!\curlyvee$, dove y_1 è un (p_1, q_1) albero con $p_1 = p$ e $q_1 = q - 1$;
- $y = \curlyvee^{y_2}$, dove y_2 è un (p_2, q_2) albero con $p_2 = p - 1$ e $q_2 = q$.

Quindi, per ogni $p, q \geq 1$, $c_{p,q}$ è la somma della cardinalità di questi tre insiemi disgiunti. Da questo segue la formula data sopra. $\square$

11.1.3 - Proposizione. *La cardinalità dell'insieme* $Y_{p,q}$ *è* $c_{p,q} := \frac{(p+q)!}{p!\,q!} \cdot \frac{(p+q+1)!}{(p+1)!\,(q+1)!}$.

Dimostrazione. Dobbiamo contare il numero $c_{p,q}$ di (p, q)-alberi, per $p, q \geq 0$. Indichiamolo, temporaneamente, con $c(p, q)$. Consideriamo i valori $c(p, q)$ come coefficienti dell'espansione di Taylor di una funzione di due variabili x e y, attorno al punto $(0, 0)$, e poniamo:

$$f(x, y) := 2xy \sum_{p,q \geq 0} c(p, q)\, x^p y^q.$$

Le condizioni (11.1.2) portano ad una equazione quadratica nella indeterminata $f(x, y)$, come è dimostrato nel lemma (11.1.4). La soluzione di questa equazione è la funzione

$$f(x, y) = -(x + y - 1) \pm [(x + y - 1)^2 - 4xy]^{\frac{1}{2}}.$$

Scegliamo il segno $-$ prima della radice, in modo che $f(0, 0) = 0$. Per ogni $n, m \geq 0$, siano $a(n, m)$ i coefficienti dell'espansione di Taylor di $f(x, y)$ attorno al punto $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \sum_{n,m \geq 0} a(n, m)\, x^n y^m.$$

Allora sappiamo che

$$a(n, m) = \frac{1}{n!\, m!} \frac{\partial^{n+m} f(0, 0)}{\partial x^n \partial y^m}.$$

Con calcoli diretti, si ottengono i seguenti valori:

$$a(0, 0) = f(0, 0) = 0, \tag{11.1}$$

$$a(n, 0) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(0, 0)}{\partial x^n} = 0, \tag{11.2}$$

perché

$$\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} = 2n!\, y\, [1 + g_{n,0}(x, y)]\, \Delta(x, y)^{-\frac{1}{2} - (n-1)},$$

dove $g_{n,0}(x, y)$ è un polinomio con $g_{n,0}(0, 0) = 0$ e

$$\Delta(x, y) := [(x + y - 1)^2 - 4xy]^{\frac{1}{2}}$$

è tale che $\Delta(0, 0) = 0$. Allo stesso modo si ottiene

$$a(0, m) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f(0, 0)}{\partial y^m} = 0, \tag{11.3}$$

perché

$$\frac{\partial^m f(x, y)}{\partial y^m} = 2m!\, x\, [1 + g_{0,m}(x, y)]\, \Delta(x, y)^{-\frac{1}{2} - (m-1)},$$

dove $g_{0,m}(0,0) = 0$, e infine

$$a(n,m) \;=\; 2\frac{(n+m-2)!\,(n+m-1)!}{(n-1)!\,(m-1)!\,n!\,m!}, \tag{11.4}$$

perché

$$\frac{\partial^{n+m} f(x,y)}{\partial x^n \partial y^m} = 2\frac{(n+m-2)!\,(n+m-1)!}{(n-1)!\,(m-1)!\,n!\,m!}\,[1+g_{n,m}(x,y)]\,\Delta(x,y)^{-\frac{1}{2}-(n+m-1)},$$

dove $g_{n,m}(0,0) = 0$. Ora, cerchiamo la relazione fra i coefficienti $a(n,m)$ ed i $c(p,q)$. Da un lato sappiamo che

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{p,q\geq 0} 2c(p,q)\,x^{p+1}y^{q+1} \\ &= \sum_{n,m\geq 1} 2c(n-1,m-1)\,x^n y^m, \end{aligned}$$

dall'altro

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \sum_{n,m\geq 0} a(n,m)\,x^n y^m \\ &= \sum_{n,m\geq 1} a(n,m)\,x^n y^m + a(0,0) + \sum_{n\geq 1} a(n,0)\,x^n + \sum_{m\geq 1} a(0,m)\,y^m. \end{aligned}$$

Ricordando che $a(0,0) = a(n,0) = a(0,m) = 0$ by (11.1), (11.2) e (11.3), si ha $a(n,m) = 2c(n-1,m-1)$, da cui segue la formula finale

$$c(p,q) = \frac{1}{2}a(p+1,q+1) = \frac{(p+q)!\,(p+q+1)!}{p!\,q!\,(p+1)!\,(q+1)!}.$$

□

11.1.4 - Lemma. *Sia* $f(x,y) = 2xy\sum_{p,q\geq 0} c(p,q)\,x^p y^q$. *Allora*

$$f^2(x,y) + 2(x+y-1)f(x,y) + 4xy = 0.$$

Dimostrazione. Poiché le relazioni del lemma (11.1.2) sui coefficienti $c(p,q)$ sono differenti per p o q uguale a zero e $p,q \geq 1$, abbiamo bisogno di scrivere $f(x,y)$ come una somma su indici $p,q \geq 1$. Perciò osserviamo anzitutto che $f(x,y)$ può essere scritta come

$$f(x,y) = \sum_{p,q\geq 0} 2c(p,q)x^{p+1}y^{q+1}$$

$$= \sum_{p,q\geq 1} 2c(p,q)\,x^{p+1}y^{q+1} + 2c(0,0)xy + \sum_{p\geq 1} 2c(p,0)\,x^{p+1}y + \sum_{q\geq 1} 2c(0,q)\,xy^{q+1} \tag{11.5}$$

$$= \sum_{\substack{p\geq 0\\ q\geq 1}} 2c(p,q)\,x^{p+1}y^{q+1} + \sum_{p\geq 0} 2c(p,0)\,x^{p+1}y \tag{11.6}$$

$$= \sum_{\substack{p\geq 1\\ q\geq 0}} 2c(p,q)\,x^{p+1}y^{q+1} + \sum_{q\geq 0} 2c(0,q)\,xy^{q+1}. \tag{11.7}$$

Ora calcoliamo $f(x,y)\cdot f(x,y)$:

$$
\begin{aligned}
f(x,y)\cdot f(x,y) &= \sum_{\substack{p_1,q_1\geq 0\\ p_2,q_2\geq 0}} 4c(p_1,q_1)\cdot c(p_2,q_2)\; x^{p_1+p_2+2}y^{q_1+q_2+2}\\
&= \sum_{p,q\geq 1} 4 \sum_{\substack{p_1+p_2=p-1\\ q_1+q_2=q-1}} c(p_1,q_1)\cdot c(p_2,q_2)\; x^{p+1}y^{q+1}\\
&= \sum_{p,q\geq 1} 4[c(p,q)-c(p,q-1)-c(p-1,q)]\, x^{p+1}y^{q+1}, \qquad \text{per (11.1.2.3)}\\
&= 2\sum_{p,q\geq 1} 2c(p,q)\, x^{p+1}y^{q+1} - 2y\sum_{\substack{p\geq 1\\ q\geq 0}} 2c(p,q-1)\; x^{p+1}y^{q} - 2x\sum_{\substack{p\geq 0\\ q\geq 1}} 2c(p-1,q)\, x^{p}y^{q+1}\\
&= 2[f(x,y)-2xy-2\sum_{p\geq 1} x^{p+1}y - 2\sum_{q\geq 1} xy^{q+1}] - 2y[f(x,y)-2\sum_{i\geq 0} xy^{i+1}]\\
&\quad -2x[f(x,y)-2\sum_{j\geq 0} x^{j+1}y], \qquad \text{per (11.5), (11.6), (11.7), e (11.1.2.1), (11.1.2.2)}\\
&= 2f(x,y)(1-x-y)-4xy-4\sum_{p-1\geq 0} x^{p+1}y - 4\sum_{q-1\geq 0} xy^{q+1}\\
&\quad +4y\sum_{i\geq 0} xy^{i+1} + 4x\sum_{j\geq 0} x^{j+1}y\\
&= -2(x+y-1)f(x,y)-4xy.
\end{aligned}
$$

Perciò $f^2(x,y)+2(x+y-1)f(x,y)+4xy=0$. □

11.2 Bicomplesso degli alberi orientati.

La doppia orientazione di un n-albero, dato dai numeri p e q di \- e /-foglie, permette di definire un doppio complesso sugli alberi, considerando le mappe che non cambiano uno dei due numeri di foglie orientate. Di solito, però, una mappa definita sugli alberi non conserva una orientazione globalmente, poiché cambia orientazione su alberi differenti. Una faccia $d_i : Y_n \longrightarrow Y_{n-1}$, per un fissato $i\in\{0,...,n\}$, quando è ristretta ad ogni componente $Y_{p,q}\subset Y_n$ assume valori in una delle due componenti $Y_{p-1,q}$, $Y_{p,q-1}$ di Y_{n-1}, a seconda dell'albero y di $Y_{p,q}$. Si consideri, per esempio, la componente $Y_{1,1}=\{\ ,\ ,\ \}\subset Y_3$ e si fissi $i=0$. Allora $d_0 : Y_{1,1}\longrightarrow Y_{1,0}\cup Y_{0,1}$ ha valori in $Y_{1,0}$ su , e in $Y_{0,1}$ su e . Ciò motiva la seguente definizione.

11.2.1 - Mappe orientate. Sia $f : k[Y_n]\longrightarrow k[Y_m]$ l'estensione lineare di un omeomorfismo di alberi, e consideriamo la sua restrizione ad ogni componente $Y_{p,q}\subset Y_n$. Chiamiamo *mappe orientate di* f le seguenti

- *orizzontale* $f^h : k[Y_{p,q}]\longrightarrow k[Y_{p-(n-m),q}]$ definita come

$$
f^h(y) := \begin{cases} f(y), & \text{se } f(y)\in k[Y_{p-(n-m),q}]\\ 0, & \text{altrimenti,}\end{cases}
$$

- *verticale* $f^v : k[Y_{p,q}] \longrightarrow k[Y_{p,q-(n-m)}]$ definita come

$$f^v(y) := \begin{cases} f(y), & \text{se } f(y) \in k[Y_{p,q-(n-m)}] \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In particolare, possiamo considerare le mappe orientate di una faccia d_i e di una degenerazione s_j.

11.2.2 - Bicomplesso di orientati alberi. Per ogni coppia di numeri naturali p, q, consideriamo $k[Y_{p,q}]$ come modulo delle (p,q)-catene, e definiamo gli operatori di bordo orizzontale e verticale $d^h : k[Y_{p,q}] \longrightarrow k[Y_{p-1,q}]$, $d^v : k[Y_{p,q}] \longrightarrow k[Y_{p,q-1}]$ rispettivamente come

$$d^h := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^h \quad \text{e} \quad d^v := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^v,$$

dove $n = p + q + 1$.

11.2.3 - Lemma. *I bordi orientati definiti sopra soddisfano $d^h d^h = 0$ e $d^v d^v = 0$ rispettivamente, quindi $(k[Y_{*,q}], d^h)$ e $(k[Y_{*,q}], d^h)$ sono complessi di catene per ogni $p, q \geq 0$.*

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che le facce orientate d_i^h e d_i^v soddisfano ancora le relazioni simpliciali (d) di (8.0.4). Mostriamo, per esempio, che $d_i^v d_j^v = d_{j-1}^v d_i^v$ per ogni $i < j$. È sufficiente provare che $d_i d_j$ è una mappa verticale (cioè $d_i d_j : k[Y_{p,q}] \longrightarrow k[Y_{p,q-2}]$) se e solo se $d_{j-1} d_i$ è verticale. La faccia d_i cancella una /-foglia se la i-esima-foglia stessa è orientata come /, cioè $\overset{i}{\diagup}$, o se è una \-foglia tale che $\overset{i\ \ i+1}{\curlyvee}$. Allora è facile vedere che entrambe le operazioni $d_i d_j$ e $d_{j-1} d_i$ cancellano due /-foglie solo sulle quattro combinazioni di queste due possibili configurazioni per le foglie i e j. $\square$

11.2.4 - Osservazione. Per ipotesi, in un modulo pre-simpliciale le facce sono mappe non nulle. Pertanto, anche se le facce orizzontali (risp. verticali) soddisfano le relazioni (d), i complessi orizzontali (risp. verticali) non sono considerati moduli pre-simpliciali.

11.2.5 - Proposizione. *La terna $(k[Y_{*,*}], d^v, d^h)$ forma un bicomplesso di catene, il cui complesso totale è il complesso (traslato) degli alberi binari $(k[Y_{*+1}], d)$.*

Alle piccole dimensioni, il bicomplesso di alberi è

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & k[Y_{0,2}] & \longleftarrow & k[Y_{1,2}] & \longleftarrow & k[Y_{2,2}] & \longleftarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & k[Y_{0,1}] & \longleftarrow & k[Y_{1,1}] & \longleftarrow & k[Y_{2,1}] & \longleftarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & k[Y_{0,0}] & \longleftarrow & k[Y_{1,0}] & \longleftarrow & k[Y_{2,0}] & \longleftarrow \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & \\
k[Y_0] & & & & & & &
\end{array}$$

Dimostrazione. Su ogni albero y, la mappa d_i agisce come d_i^h (perché $d_i^v(y) = 0$), o come d_i^v (quando $d_i^h(y) = 0$). Quindi, per ogni $i = 0, \ldots n$, si ha una ovvia identità $d_i = d_i^h + d_i^v$. Di conseguenza, l'operatore di bordo $d : k[Y_{p,q}] \longrightarrow k[Y_{p-1,q}] \oplus k[Y_{p,q-1}]$ è la somma $d = d^h + d^v$. Allora si ha $dd = d^h d^h + d^h d^v + d^v d^h + d^v d^v = 0$. Da (11.2.3) segue che $d^h d^v + d^v d^h = 0$. Questo mostra allo stesso tempo che $(k[Y_{*,*}], d^h, d^v)$ è un bicomplesso, e che $k[Y_{*+1}] = Tot(k[Y_{*,*}])$. □

11.2.6 - Lemma. *Nel bicomplesso di alberi, i complessi verticali sono aciclici.*

Dimostrazione. Poiché l'omotopia $h : Y_n \longrightarrow Y_{n+1}$ definita come $h(y) := \vee^{y}$ (si veda (7.3.4)) è una mappa verticale, cioè

$$h : Y_{p,q} \longrightarrow Y_{p,q+1},$$

può ancora essere usata come mappa di omotopia fra l'identità e le mappe nulle sui complessi verticali. Infatti è facile mostrare che

$$d^v h + h d^v = id.$$

□

11.2.7 - Osservazione. Il bicomplesso di alberi dà luogo ad una sequenza spettrale

$$E^2_{p,q} = H_p H_q(k[Y_{*,*}]) \Longrightarrow H_{p+q}(k[Y_{*+1}])$$

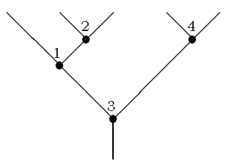
che è zero dappertutto, poiché il complesso di alberi è aciclico ed il piano E^1, come sappiamo da (11.2.6), è già zero. Comunque la particolare struttura degli insiemi di alberi diventa interessante quando osserviamo un complesso i cui moduli di catene hanno $k[Y_*]$ come component tensoriale, com'è per il complesso di catene delle dialgebre. In questo caso il bicomplesso di alberi permette di trovare una sequenza spettrale che converge all'omologia del dato complesso.

11.3 Decomposizione dei complessi verticali.

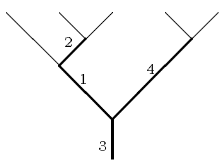
I complessi verticali del bicomplesso di alberi risultano essere la somma diretta di complessi costruiti su qualche albero speciale. Innanzitutto descriviamo come costruire un complesso verticale su un dato albero. Abbiamo bisogno di introdurre un secondo tipo di mappe crescenti $Y_n \longrightarrow Y_{n+1}$. L'operazione di aggiungere una foglia ad un albero consiste, più precisamente, nell'innestare una nuova foglia in un dato lato dell'albero. Gli operatori di degenerazione definiti in (8.1.1), in effetti, innestano una nuova foglia nei lati 'esterni'. Per definire dei nuovi operatori crescienti dobbiamo innanzitutto numerare i lati interni di un albero.

11.3.1 - Ordine dei vertici e dei lati interni. Ogni albero binario con $n + 1$ foglie e radice ha precisamente n vertici interni. Scegliamo la seguente regola per numerarli. In (9.3.1) abbiamo dato una regola per numerare i vertici interni. Ricordiamo che un vertice interno è numerato con i se chiude un percorso discendente che parte fra le foglie numero $i - 1$ e i.

Un *lato* du un albero è ogni ramo delimitato da due vertici, inclusi quelli esterni (le foglie) e la radice. Indichiamo con i il lato il cui estremo superiore è il vertice i. Con questa regola, ogni foglia ha lo stesso numero del lato che da lei comincia. Per esempio:



e



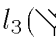
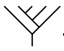
Ordine dei vertici interni. Ordine dei lati interni.

In conclusione, ogni n-albero ha $n+1$ lati esterni (le foglie), numerati da 0 a n, ed n lati interni (inclusi quello che finisce alla radice), numerati da 1 to n.

11.3.2 - Operatori di innesto Per ogni $n \geq 0$, definiamo gli operatori di *innesto sinistro* ed *innesto destro*, chiamati anche *grafter* sinistro e destro (dall'inglese 'graft', innestare)

$$l_i, r_i : Y_n \longrightarrow Y_{n+1} \quad , \quad i = 1, ..., n$$

come le mappe che innestano una nuova foglia nell'i-esimo lato interno di un albero, rispettivamente da sinistra e da destra. Per esempio

$l_3($$) =$  , $r_3($$) =$ .

Si noti che l'operazione di innestare una nuova foglia in un lato *esterno* produce lo stesso risultato compiuta da sinistra o da destra: consiste nel *biforcare* la foglia. Quindi, come abbiamo accennato, gli operatori di innesto su lati esterni coincidono con le degenerazioni.

Poiché siamo interessati al bicomplesso degli alberi, vorremmo determinare se le mappe crescenti sono orizzontali o verticali. Nel prossimo lemma dimostriamo che l'orientazione degli operatori d'innesto non dipende dall'indice i né dall'albero su cui agiscono. Al contrario, l'orientazione di una degenerazione s_i cambia con l'indice $i = 0, ..., n$ a seconda del particolare albero su cui agisce.

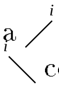
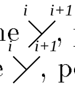
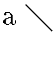
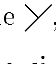
11.3.3 - Lemma. *Siano p, q dei numeri naturali, e $n = p + q + 1$.*

1. Ogni grafter sinistro l_i agisce come mappa orizzontale, cioè $l_i : Y_{p,q} \longrightarrow Y_{p+1,q}$ per ogni $i = 1, ..., n$. Analogamente, ogni grafter destro r_i agisce come mappa verticale, cioè $r_i : Y_{p,q} \longrightarrow Y_{p,q+1}$ per ogni $i = 1, ..., n$.

2. Per ogni (p, q)-albero y, e per ogni indice $i \in \{0, ..., n\}$, le degenerazione s_i è orizzontale su y, cioè $s_i^v(y) = 0$, se e solo se l'i-esima foglia di y è orientata come /. Analogamente, s_i è verticale su y, cioè $s_i^h(y) = 0$, se e solo se l'i-esima foglia di y è orientati come \.

Dimostrazione. 1. Ovvio, infatti ogni grafter sinistro l_i agisce aggiungendo una \-foglia, mentre ogni grafter sinistro r_i agisce aggiungendo una /-foglia.

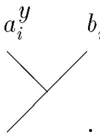
Si noti che se un grafter sinistro l_i aggiunge una foglia numerata da $j \in \{0, 1, ..., n\}$, allora il nuovo vertice interno dell'albero sarà numerato $j + 1$. Analogamente, se un grafter sinistro r_i aggiunge una foglia numerata da $j \in \{0, 1, ..., n\}$, allora il nuovo vertice interno dell'albero sarà numerato j.

2. La mappa s_i agisce sulla foglia  come , perciò s_i aggiunge una \-foglia (è orizzontale). Analogamente, s_i agisce sulla foglia  come , perciò s_i aggiunge una /-foglia (è verticale). $\square$

Nella parte rimanente di questo capitolo ci occupiamo dei complessi verticali $k[Y_{p,*}]$, perciò fissiamo un $p \geq 0$, e osserviamo i (p, q)-alberi al variare di $q \geq 0$.

11.3.4 - Indici delle foglie orientate. Sia y un (p, q)-albero, e $n = p + q + 1$. Definiamo una mappa $a^y : \{1, ..., p\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$, $a^y(i) = a_i^y$, assegnando all'intero i l'indice della i-esima \-foglia di y, contando le foglie da sinistra a destra ed escludendo la foglia 0.

Ogni \-foglia (eccetto la prima) si innesta un una /-foglia (inclusa l'ultima). Perciò c'è una mappa $b^y : \{1, ..., p\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$, $b^y(i) = b_i^y$, che assegna all'intero i l'indice della /-foglia in cui la i-esima *backslash*-foglia si innesta, cioè



.

Chiamiamo $A(y) := \{a_1^y, ..., a_p^y\} \subset \{1, ..., n\}$ l'immagine di a. Poiché le p \-foglie di y sono distinte l'una dall'altra, la mappa a_y è una biezione fra l'insieme $\{1, ..., p\}$ e l'insieme $A(y)$. Perciò si può anche definire una mappa $b : A(y) \longrightarrow \{1, ..., n\}$ ponendo $b(a_i^y) = b_i^y$. Chiamiamo $B(y) := \{b_1^y, ..., b_p^y\} \subset \{1, ..., n\}$ l'immagine di b.

11.3.5 - Lemma. *Sia y un (p, q)-albero, e $n = p + q + 1$.*

1. Le mappe di degenerazione sono tutte distinte l'una dall'altra, cioè per ogni $i, j \in \{0, ..., n\}$, se $i \neq j$ allora $s_i(y) \neq s_j(y)$. (In particolare questo vale per ogni indice nell'insieme $A(y)$.)

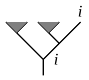
2. Ogni grafter destro in un lato interno numerato come una /-foglia produce lo stesso albero di qualche degenerazione o di un grafter destro in un lato numerato come una \-foglia. In altre parole, per ogni indice $i \in \{1, ..., n\} \setminus A(y)$, esiste una $a \in A(y)$ tale che $r_i(y) = s_a(y)$ oppure $r_i(y) = r_a(y)$.

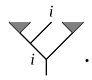
3. Ogni grafter destro in un lato interno numerato come una \-foglia è distinto da ogni altro e da ogni degenerazione. Cioè, per ogni $a \in A(y)$, $r_a(y) \neq s_{a'}(y)$ e $r_a(y) \neq r_{a'}(y)$ per ogni $a' \neq a \in A(y)$.

Quindi, per ogni (p, q)-albero y, ci sono precisamente $p + 1$ distinte degenerazioni verticali non-nulle agenti su y, le $s_0, s_{a_1}, ..., s_{a_p}$, e p distinti operatori di innesto verticali, i $r_{a_1}, ..., r_{a_p}$.

Dimostrazione. L'asserzione 1. è ovvia.

2. Supponiamo che un lato interno sia numerato come una /-foglia, da i. Allora ci sono due possibili forme del ramo attorno alla i-esima foglia:



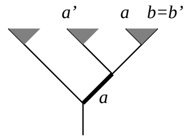
e


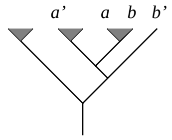
.

Nel primo caso, si ha $i = b(a)$ per qualche $a \in A(y)$. Allora, se non c'è alcun a' fra a e b, si ha $r_b(y) = s_a(y)$. Altrimenti, se ci sono degli $a', a'', ... \in A(y)$ tali che $a < a' < a'' < \cdots < b$, si ha $r_b(y) = r_{a'}(y)$.

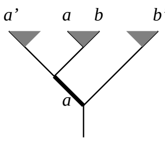
Nel secondo caso, si ha $i \in \{1, ..., n\} \setminus [A(y) \cup B(y)]$, e la i-esima-foglia si innesta in una \-foglia numerata, diciamo, da a, quindi $a < i < b$. Allora, se non c'è alcun a' fra a e i, si ha $r_b(y) = s_a(y)$. Altrimenti, se ci sono degli $a', a'', ... \in A(y)$ tali che $a < a' < a'' < \cdots < i$, si ha $r_b(y) = r_{a'}(y)$.

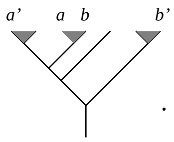
3. La posizione di un lato interno che è numerato come una \-foglia è molto particolare. Supponiamo che sia numerato da a. Allora ci deve essere un indice $a' < a$ tale che il lato interno a cominci nell'intersezione fra la \-foglia a' e la /-foglia $b = b(a)$. Perciò ci sono solo due possibili forme del ramo attorno alla a-esima foglia, e r_a agisce come segue:
per $b = b'$:

(1) = 

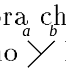
$\mapsto$ $r_a(1)$ = 

e per $b < b'$:

(2) = 

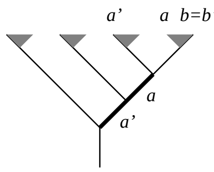
$\mapsto$ $r_a(2)$ = 

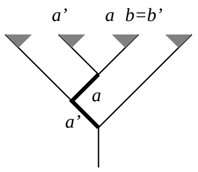
.

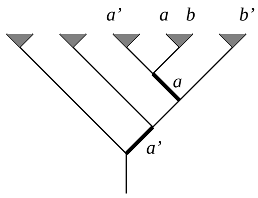
È chiaro allora che $r_a(y)$ non può mai produrre lo stesso albero che si ottiene biforcando una foglia: il ramo 

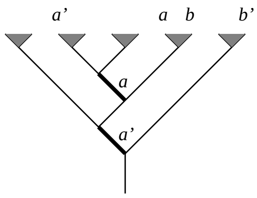
lo impedisce. Dunque $r_a(y) \neq s_{a''}(y)$ per ogni $a'' \neq a$.

Ora consideriamo il grafter destro in un'altra \-foglia. Di nuovo il lato interno è piazzato in una posizione peculiare, come quello numerato da a. Consideriamo le 8 mutue posizioni di due lati interni numerati da a e a'. Supponiamo $a' < a$. Se $b \leq b'$:

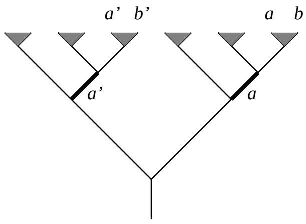
(11) = 

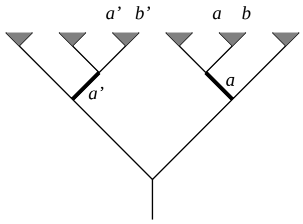
(12) = 

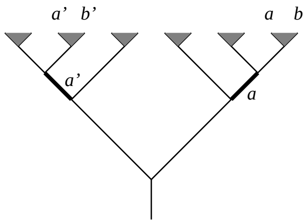
(21) = 

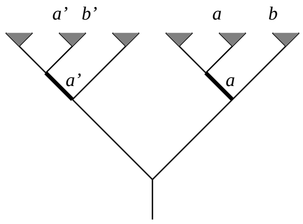
(22) = 

Se $b > b'$:

[11] = 

[12] = 

[21] = 

[22] = 

Si può verificare che su questi 8 alberi si ha sempre $r_a \neq r_{a'}$, e così, infine, r_a è sempre diverso da $r_{a'}$. □

Poiché ogni mappa r_i coincide con qualche degenerazione, per $i \in \{1, ..., n\} \setminus A(y)$, diamo le relazioni di commutazione fra r_a e le facce d_i solo per $a \in A(y)$.

11.3.6 - Lemma. *Gli operatori di innesto destro soddisfano le relazioni*

$$(dr) \quad d_i r_a = \begin{cases} r_{a-1} d_i, & per\ 0 \leq i < a \\ r_a d_i, & per\ a \leq i \leq b(a) \\ id, & per\ i = b(a)+1 \\ r_a d_{i-1}, & per\ i > b(a)+1 \end{cases}$$

$$(r) \quad r_a r_{a'} = \begin{cases} r_{a'+1} r_a, & per\ a < a'\ e\ b < b' \\ r_{a'} r_a, & per\ a < a'\ e\ b \geq b' \\ r_{b+1} r_a, & per\ a = a' =: a \end{cases}$$

Si noti comunque che la relazione $r_a r_{a'} = r_{b+1} r_a$, per $a = a' =: a$, non è interessante per noi, perché $b+1$ è un lato numerato come una /-foglia.

Dimostrazione.

(dr) Come abbiamo visto nel punto 2. del lemma (11.3.5), per ogni $a \in A(y)$, l'operatore r_a agisce su due possibili configuarazioni di base (1) e (2). Si possono verificare le relazioni (dr) su (1) con l'aiuto delle seguenti observazioni.

• Se $i < a$, la foglia numero a di (1) è numerata da $a-1$ in $d_i(1)$, quindi anche il lato interno numero a in (1) diventa $a-1$ in $d_i(1)$.

• Se $a \leq i \leq b$, il lato numero a in (1) rimane numerato da a in $d_i(1)$.

• Se $i = b+1$, la faccia d_{b+1} cancella precisamente la foglia che r_a ha appena aggiunto.

• Se $i > b+1$, il lato numero a in (1) rimane numerato da a in $d_i(1)$, ma la foglia numero i cancellata in $r_a(1)$ dalla faccia d_i era numerata da $i-1$ in (1).

Le stesse osservazioni valgono per l'albero (2).

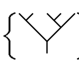
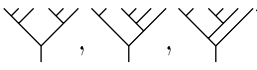
(r) Come prima,le relazioni (r) devono essere verificate direttamente sugli 8 alberi (ij) e $[ij]$, per $i,j = 1,2$, dati nel punto 3. della dimostrazione del lemma (11.3.5). □

11.3.7 - Torre verticale. Per ogni (p,q)-albero y, chiamiamo *torre verticale su y* la famiglia $\{Y^y_{p,q+m}\}_{m\geq 0}$, dove $Y^y_{p,q} := \{y\}$, e

$$Y^y_{p,q+m} := \{s_0(y'), s_{a_i}(y'), r_{a_i}(y'), \text{per ogni } i = 1,...,p \text{ e ogni albero } y' \in Y^y_{p,q+m-1}\},$$

per ogni $m > 0$. Si noti che $Y^y_{p,q+1}$ è un sottinsieme di $Y_{p,q+1}$ contenente $2p+1$ alberi.

Per esempio, nell'albero $y =$  $\in Y_{1,2}$, si ha $a_1 = 2$ e s_0 () $=$ , s_2 () $=$  e r_2 () $=$ . Perciò

$Y^y_{1,2} = \{$  $\}$, $Y^y_{1,3} = \{$  $\}$,

e così via.

In generale, dato un (p,q)-albero y, la torre verticale su y non è un complesso verticale. Il prossimo lemma dice, più precisamente, quando una torre verticale è chiusa per le facce verticali.

11.3.8 - Lemma. *Per ogni (p,q)-albero y, la torre verticale $\{k[Y^y_{p,q+m}]\}_{m\geq 0}$ è chiusa per le facce verticali d^v_i se e solo se $d^v_i(y) = 0$ per ogni $i = 0,...,p+q+1$.*

Dimostrazione. (i) Supponiamo che $d^v_i(y) = 0$ per tutti gli $i = 0,...,p+q+1$. Mostriamo che se y' appartiene a $Y^y_{p,q+m}$ per qualche $m > 0$, allora per ogni indice $k \in \{0,...p+q+m+1\}$ tale che $d^v_k(y') \neq 0$, l'albero $d^v_k(y')$ appartiene a $Y^y_{p,q+m-1}$. Procediamo per induzione su m.

• Anzitutto supponiamo che $y' \in Y^y_{p,q+1}$. Allora per definizione di torre verticale sappiamo che $y' = s_0(y)$ o esiste un indice $i \in \{1,...,p\}$ tale che y' è uguale a $s_{a_i}(y)$ oppure a $r_{a_i}(y)$. Ora consideriamo un $k \in \{0,...,p+q+2\}$ tale che $d^v_k(y') \neq 0$, allora si ha

$$d^v_k(y') = d^v_k s_{a_i}(y) = \begin{cases} s_{a_i-1} d^v_k(y) = 0 & \text{, se } k < a_i \\ y & \text{, se } k = a_i, a_i+1 \\ s_{a_i} d^v_{k-1}(y) = 0 & \text{, se } j \geq k+1 \end{cases}$$

per a_i possibilmente uguale anche a 0, oppure

$$d_k^v(y') = d_k^v r_{a_i}(y) = \begin{cases} r_{a_i-1}d_k^v(y) = 0 & \text{, se } k < a_i \\ r_{a_i}d_k^v(y) = 0 & \text{, se } a_i \leq k \leq b_i \\ y & \text{, se } k = b_i + 1 \\ r_{a_i}d_{k-1}^v(y) = 0 & \text{, se } k > b_i + 1 \end{cases}$$

In conclusione si ha che $d_k^v(y') = 0$ oppure che $d_k^v(y') = y$ appartiene a $Y_{p,q}^y$.

• Supponiamo ora che per ogni albero $y'' \in Y_{p,q+m-1}^y$, si ha $d_k^v(y'') \in Y_{p,q+m-2}^y$ per ogni $k = 0, ...p + q + m - 1$ tale che $d_k^v(y'') \neq 0$. Mostriamo che lo stesso vale per ogni albero $y' \in Y_{p,q+m}^y$. Infatti y' deve essere uguale o a $s_0(\bar{y})$, $s_{a_i}(\bar{y})$ oppure a $r_{a_i}(\bar{y})$, per un indice $i \in \{1, ..., p\}$, con $\bar{y} \in Y_{p,q+m-1}^y$. Quindi, nel primo caso (per a_i anche uguale a 0)

$$d_k^v(y') = d_k^v s_{a_i}(\bar{y}) = \begin{cases} s_{a_i-1}d_k^v(\bar{y}) & \text{, se } k < a_i \\ \bar{y} & \text{, se } k = a_i, a_i + 1 \\ s_{a_i}d_{k-1}^v(\bar{y}) & \text{, se } k \geq a_i + 1 \end{cases}$$

appartiene a $Y_{p,q+m-1}^y$, perché per ipotesi induttive $d_k^v(\bar{y}) \in Y_{p,q+m-2}^y$, e nel secondo caso

$$d_k^v(y') = d_k^v r_{a_i}(\bar{y}) = \begin{cases} r_{a_i-1}d_k^v(\bar{y}) & \text{, se } k < a_i \\ r_{a_i}d_k^v(\bar{y}) & \text{, se } a_i \leq k \leq \beta_i \\ \bar{y} & \text{, se } k = b_i + 1 \\ r_{b_j}d_{k-1}^v(\bar{y}) & \text{, se } k > b_i + 1 \end{cases}$$

appartiene a $Y_{p,q+m-1}^y$ per la stessa ragione.

(ii) Supponiamo ora che esista un indice $k \in \{0, ..., p + q + 1\}$ tale che $d_k^v(y) \neq 0$ in $Y_{p,q-1}$. Mostriamo che la torre su y non è closed per le facce verticali. Infatti:

• Se $k = 0$, si ha $s_{a_i}(y) \in Y_{p,q+1}^y$ per ogni $i = 1, ..., p$. Allora $d_0^v(s_{a_i}(y)) = s_{a_i-1}d_0^v(y)$ è un albero in $Y_{p,q}$ che è differente da y, cioè non appartiene a $Y_{p,q}^y$.

• Se $k = a_i$ per qualche $i \in \{1, ..., p\}$, si ha $s_0(y) \in Y_{p,q+1}^y$. Allora $d_{a_i}^v(s_0(y)) = s_0 d_{a_i+1}^v(y)$ è un albero in $Y_{p,q}$ differente da y.

• Se $a_i < k \leq b_i$ per qualche $i \in \{1, ..., p\}$, allora $s_{a_i}(y) \in Y_{p,q+1}^y$ e $d_k^v(s_{a_i}(y)) = s_{a_i-1}d_k^v(y)$ è un albero in $Y_{p,q}$ differente da y. □

11.3.9 - Alberi /-minimali. Per ogni $p \geq 0$, chiamiamo $(p, *)$-*albero /-minimale* ogni (p, q)-albero y tale che $d_i^v(y) = 0$ per tutti gli $i = 0, ..., n$. Da (11.3.8) segue che la torre verticale costruita su un albero /-minimale è un complesso verticale.

11.3.10 - Lemma. *C'è una corrispondenza biettiva fra l'insieme Y_p e l'insieme dei $(p, *)$-alberi /-minimali. Inoltre, il numero di /-foglie di un p-albero y è uguale al numero di /-foglie del suo $(p, *)$-albero /-minimale associato $\tilde{y}$.*

Dimostrazione. Sia

$$\varphi : Y_p \longrightarrow \{y \in \bigcup_{0\le s\le p-1} Y_{p,s};\, d_i^v(y) = 0, i = 0, 1, ..., p+s+1\}$$

la mappa che manda un albero y nell'albero $\varphi(y)$ ottenuto biforcando tutte le /-foglie. La mappa φ è chiaramente iniettiva, mostriamo che è ben definita.

• Se y è un p-albero, allora l'albero $\varphi(y)$ ha esattamente p foglie orientate come \. Infatti, supponiamo che il p-albero y giacia nella componente $Y_{r,s}$ di Y_p, cioè che y abbia r \-foglie interne e s /-foglie interne, con $r+s+1 = p$. Allora l'albero $\varphi(y)$ ha le originali r \-foglie, e le nuove $s+1$ \-foglie che appaionmo dopo la bifurcazione delle $s+1$ totali /-foglie.

• Se y è un p-albero, allora l'albero $\varphi(y)$ può avere al massimo $p-1$ /-foglie interne. Infatti, le /-foglie di $\varphi(y)$ sono esattamente le s /-foglie originali del p-albero y (preso nella componente $Y_{r,s}$ di Y_p), e chiaramente $0 \le s \le p-1$. Quindi $\varphi(y)$ appartiene all'unione $\bigcup_{0\le s\le p-1} Y_{p,s}$.

• Mostriamo che se $\varphi(y)$ appartiene all'insieme $Y_{p,s}$, allora $d_i^v(\varphi(y)) = 0$ per ogni $i = 0, 1, ..., p+s+1$. Se l'indice i numera una /-foglia di $\varphi(y)$, segue dalla costruzione di una /-foglia biforcata di y, perciò d_i^v produce un albero con lo stesso numero di /-foglie, ed una \-foglia di meno. Quando l'indice i numera una \-foglia di $\varphi(y)$, la faccia d_i chiaramente cancella una \-foglia a meno che la $i+1$-esima foglia sia una / foglia innestata nella i-esima foglia, e questo è impossibile nell'albero $\varphi(y)$, perché per costruzione ogni /-foglia è preceduta da una \-foglia innestata nella /-foglia, e non l'opposto.

Infine, per provare che la mappa φ è una biezione, mostriamo che la mappa suriettiva

$$\psi : \bigcup_{q\ge 0} Y_{p,q} \longrightarrow Y_p$$

che cancella tutte le /-foglie, inclusa l'ultima, è inversa alla φ quando è ristretta al sottoinsieme degl alberi con $d_i^v(y) = 0$ per tutti gli $i = 0, ..., p+q+1$.

La composizione $\psi \circ \varphi$ è chiaramente l'identità su Y_p. Dall'altro lato, sia y un (p, q)-albero, per qualche $q \ge 0$. Per costruzione, l'albero $\varphi\psi(y)$ è ottenuto cancellando tutte le /-foglie da y, e poi sostituendo tutte le nuove /-foglie con delle biforcazioni. Perciò y e $\varphi\psi(y)$ possono solo differire per qualche /-foglia, diciamo quella numero k, tale che la foglia numero $k-1$ *not* sia una \-foglia che si innesta in it. Ogni tale foglia produce una faccia verticale non-nulla d_k^v. Poiché il dominio di ψ è ristretto agli alberi con solo facce verticali nulle, gli alberi y e $\varphi\psi(y)$ devono coincidere. □

Dimostriamo ora il teorema principale di questo capitolo.

11.3.11 - Teorema. *Per ogni $p \ge 0$ il complesso verticale $(k[Y_{p,*}], d^v)$ si scompone in somma diretta di complessi:*

$$k[Y_{p,*}] = \bigoplus_{y\in Y_p} k[Y_{p,*}^{\tilde{y}}],$$

dove $\tilde{y}$ è l'albero /-minimale associato a y.

Dimostrazione. Sappiamo già che i $k[Y_*^{\tilde{y}}]$ sono sottocomplessi di $k[Y_{p,*}]$. Per costruzione è ovvio che la somma è diretta, quindi rimane solo da mostrare che è uguale (e non più piccola) al complesso verticale, cioè che per ogni $y \in Y_{p,q}$, esiste un albero $y' \in Y_{p'}$ tale che $y \in Y_m^{\tilde{y}'}$ per qualche $m \ge 0$.
Poniamo $y' := \psi(y) \in Y_p$. Allora $\tilde{y}' \in Y_{p,q_{y'}}$ è la configurazione /-minimale di y, cioè y differisce

da $\tilde{y}'$ per qualche /-foglia che non è numerata da un indice b_i, con $i = 1, ..., p$. Infatti, per definizione di $Y_*^{\tilde{y}}$, ogni albero nel grado m si ottiene aggiungendo una /-foglia ad un albero nel grado $m - 1$, per mezzo delle mappe s_a o r_a. Perciò y appartiene a $Y^{\tilde{y}'}_{p,q_{y'}+m}$, con $m = q - (q_{y'})$. □

Il teorema (11.3.11) dà la relazione fra l'omologia verticale del bicomplesso di alberi e l'omologia dei sottocomplessi definiti in (11.3.7). Il prossimo passo è perciò una descrizione di questi sottocomplessi.

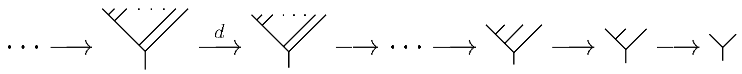
11.3.12 - Proposizione. *Sia y un p-albero, con $p > 0$. Sia $\tilde{y} \in Y_{p,q_y}$ la configurazione /-minimale di y. Allora $k[Y^{\tilde{y}}_{p,q_y+*}]$ è il complesso totale di un multi-complesso, con dimensione $d = 2p + 1$.*

Dimostrazione. Basta applicare la definizione di $k[Y_*^{\tilde{y}}]$ ed osservare, dopo (11.3.6) e (11.3.5), che $2p + 1$ è precisamente il numero di distinte mappe che possono agire su un albero con p \-foglie aggiungendo una /-foglia. □

11.4 Disegni dei complessi verticali.

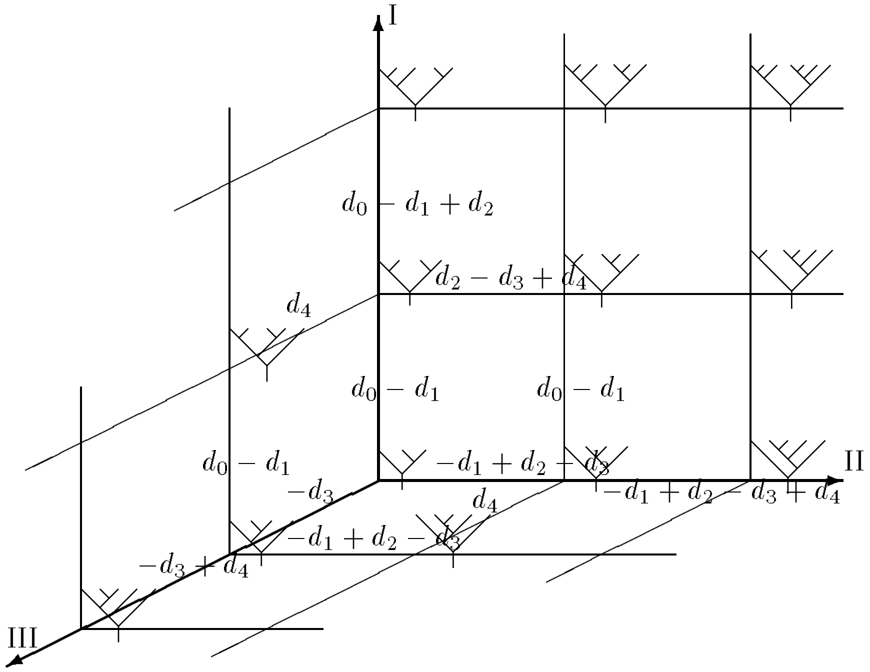
Nel prossimo capitolo estendiamo il bicomplesso degli alberi ad un bicomplesso di catene per le dialgebre. Questo permette di trovare una sequenza spettrale che converge all'omologia delle dialgebre e quindi di provare qualche teorema importante sull'omologia dellei dialgebre non unitarie. Per facilitare la comprensione dei calcoli che si basano sul complesso degli alberi, disegnamo i complessi verticali degli alberi $k[Y_{p,*}]$ per valori piccoli di p. Danno facilmente un'idea della situazione per ogni p.

11.4.1 - Complesso verticale per $p = 0$. Per $p = 0$ il complesso verticale $k[Y_{0,*}]$ è 1-dimensionale,



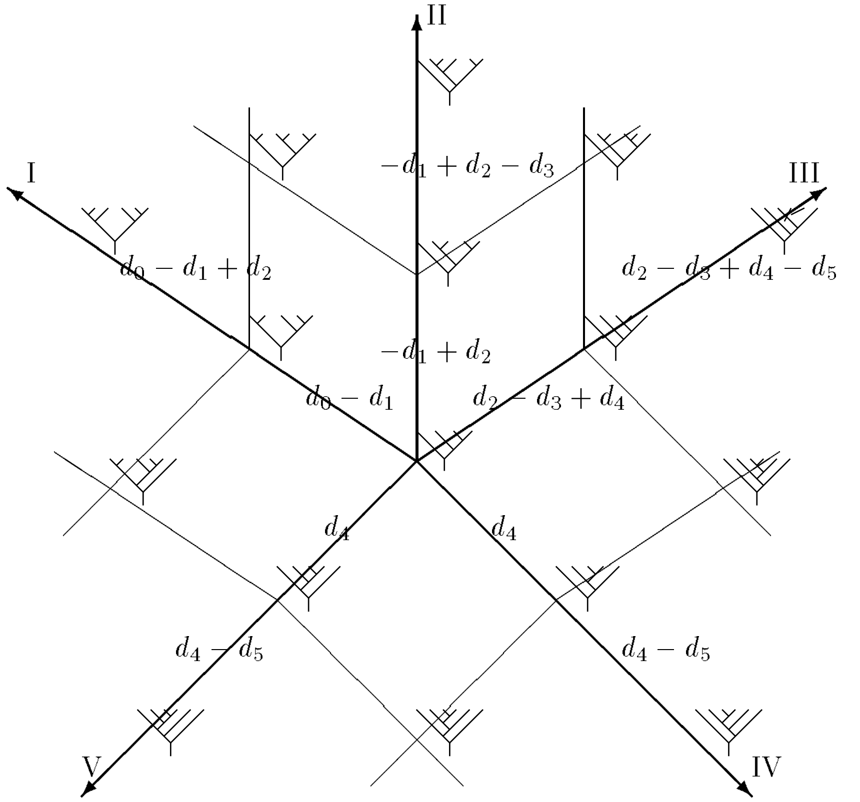
ed è anche pre-simpliciale, poiché tutte le facce sono non-nulle: $d = d_0 - d_1 + ... + (-1)^n d_n$.

11.4.2 - Complesso verticale per $p = 1$. Per $p = 1$, l'insieme Y_1 contiene solo l'albero $y =$, che ha $(1,*)$-albero /-minimal associato $\tilde{y} =$. Quindi $k[Y_{1,*}] = k[Y_{1,*}]$ è la torre verticale su . Questo complesso è il totale di un multi-complesso con dimensione $2 \cdot 1 + 1 = 3$.

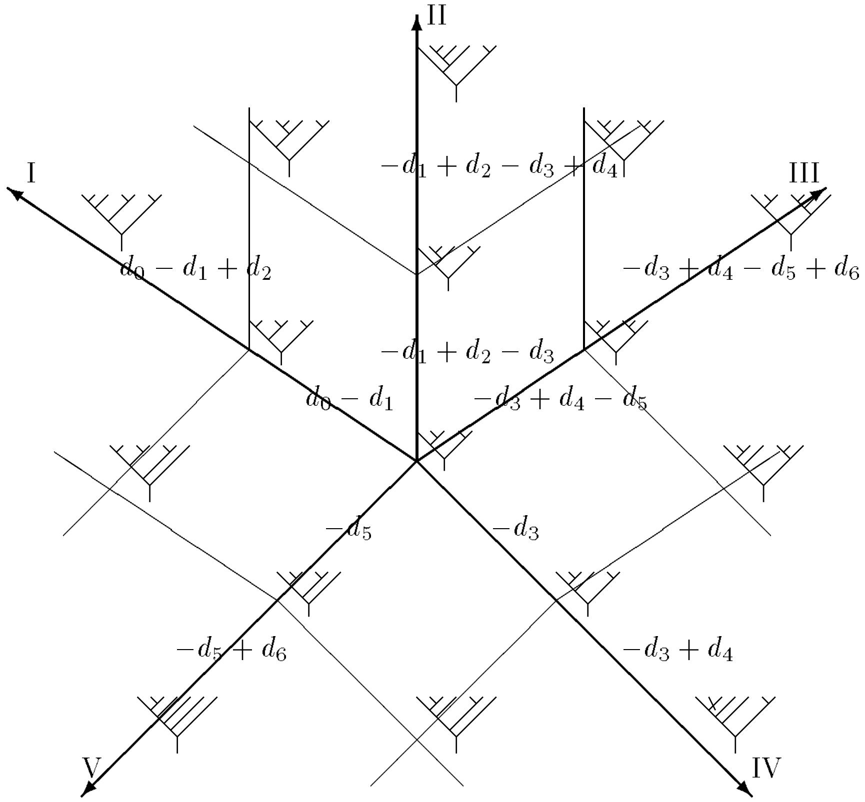


Torre verticale con base .

11.4.3 - Complesso verticale per $p = 2$. Per $p = 2$, l'insieme Y_2 contiene due alberi, e , con alberi orientati /-minimali dati rispettivamente da e . Quindi $k[Y_{2,*}] = k[Y_{2,*}] \oplus k[Y_{2,*}]$. Disegnamo i due multi-complessi con basi e rispettivamente. Si noti che hanno la stessa dimensione $d = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

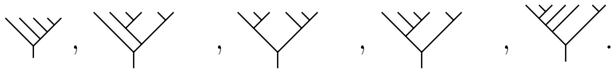


Torre verticale con base ⅄.



Torre verticale con base ⅄.

11.4.4 - Complesso verticale per $p \geq 3$. Per $p = 3$, l'insieme Y_3 contiene cinque alberi, , , , e , che corrispondono, rispettivamente, ai cinque seguenti alberi orientati /-minimali:



Quindi $k[Y_{3,*}]$ è la somma diretta di cinque torri verticali basate su questi cinque alberi. Ogni torre verticale è un multi-complesso con dimensione $d = 2 \cdot 3 + 1 = 7$. Il disegno di questi cinque 7-complessi è molto simile al disegno del caso $p = 2$, e lo si può facilmente immaginare.

In modo simile si può procedere per $p = 4, 5, \ldots$. Ogni complesso verticale $k[Y_{p,*}]$ è la somma diretta di c_p torri verticali (dove c_p è il numero di p-alberi), e ogni torre verticale è un multi-complesso con dimensione $d = 2 \cdot p + 1$.

Chapter 12

Omologia delle dialgebre non unitarie, sequenza spettrale

Le dialgebre non unitarie danno origine ad un complesso di omologia che non ammette degenerazioni né extra-degenerazioni. Pertanto nello studio della loro omologia non è possibile applicare le tecniche descritte nel capitolo 8, basate sulla struttura pseudo-simpliciale dei moduli di catene.

In questo capitolo, sfruttiamo le proprietà combinatoriche degli insiemi degli alberi planari, che sono state descritte nel capitolo precedente, per dimostrare un teorema di fondamentale importanza: l'omologia delle dialgebre è un funtore derivato, nella categoria dei moduli sull'algebra inviluppo universale.

Un altro risultato non banale che si ottiene osservando la sequenza spettrale indotta dagli alberi orientati è l'isomorfismo fra l'omologia di dialgebra e l'omologia di Hochscild per le algebre associative H-unitarie, di cui si è parlato nel capitolo 7.

12.1 Bicomplesso delle dialgebre e sequenza spettrale.

12.1.1 - Bicomplesso di catene. Sia D una dialgebra sul campo k, ed N una corappresentazione di D. Per ogni $p, q \geq 0$, definiamo il *modulo di* (p,q)*-catene* di D a coefficienti in N come

$$CY_{p,q}(D,N) := k[Y_{p,q}] \otimes N \otimes D^{\otimes p+q+1}.$$

Poiché $Y_{p,q} \subset Y_n$ per $n = p+q+1$, si ha una inclusione di k-moduli $CY_{p,q}(D,N) \subset CY_n(D,N)$. Definiamo un'applicazione k-lineare $d^h : CY_{p,q}(D,N) \longrightarrow CY_{p-1,q}(D,N)$, $d^h := \sum_{i=0}^{p+q+1}(-1)^i d_i^h$, per mezzo delle facce

$$d_i^h(y \otimes \underline{a}) := d_i^h(y) \otimes d_i^y(\underline{a}),$$

dove $d_i^h(y)$ è la faccia orizzontale che agisce sull'albero, come in (7.1.1), e il termine $d_i^y(\underline{a})$ è stato definito in (7.1.1). Analogamente, usando le facce verticali sugli alberi, possiamo introdurre un'applicazione k-lineare $d^v : CY_{p,q}(D,N) \longrightarrow CY_{p,q-1}(D,N)$.

12.1.2 - Lemma. *La famiglia* $(CY_{p,q}(D,N), d^h, d^v)$ *forma un bicomplesso, il cui complesso totale è il complesso di dialgebra traslato* $CY_{*-1}(D,N)$.

Dimostrazione. Per definizione, l'orientazione delle facce su $CY_{p,q}(D,N)$ dipende solo dall'orientazione delle facce nel bicomplesso degli alberi. Quindi le identità $d^hd^h = 0 = d^vd^v$ e $d^vd^h + d^hd^v = 0$, seguono immediatamente dai lemma (11.2.3) e (7.1.2). Infine, poiché

$$CY_n(D,N) = \bigoplus_{p+q+1=n} CY_{p,q}(D,N)$$

e $d = d^h + d^v$, è evidente che $CY_{*-1}(D,N) = \mathrm{Tot}(CY_{*,*}(D,N)$. □

12.1.3 - Osservazione. I complessi verticale e orizzontale sono isomorfi, tramite la mappa indotta dalla simmetria assiale $y \mapsto y^{op}$:

$$CY_{p,*}(D,N) \longrightarrow CY_{*,p}(D,N).$$

Come conseguenza immediata, si ha una sequenza spettrale convergente all'omologia di dialgebra.

12.1.4 - Teorema. *Sia D una dialgebra ed N una D-corappresentazione. Esiste una sequenza spettrale $E^2_{pq} \Longrightarrow HY_{p+q+1}(D,N)$ che converge all'omologia di dialgebra di D, con*

$$E^1_{pq} := H_q(CY_{p,*}(D,N), d^v),$$

e

$$E^2_{pq} := H_p(E^1_{*q}, (d^h)_*) = H_pH_q(CY_{*,*}(D,N)).$$

Dimostrazione. Segue dal lemma (12.1.2). □

12.2 Decomposizione del piano E^1.

12.2.1 - Complessi verticali 'a torre'. Sia D una dialgebra e N una D-corappresentazione. Per ogni (p,q)-albero y, e per ogni $m \geq 0$, definiamo un sottomodulo del modulo di catene di dialgebra.

$$CY^{y}_{p,q+m}(D,N) := k[Y^{y}_{p,q+m}] \otimes N \otimes D^{\otimes p+q+m},$$

dove $k[Y^{y}_{p,q+m}]$ è la torre verticale costruita su y, come definita in (11.3.7).

La famiglia di sottomoduli $CY^{y}_{p,q+*}(D,N)$ non è, in generale, un sottocomplesso del complesso verticale di catene $CY_{p,q+*}(D,N)$, ma la condizione per esserlo dipende solo dagli alberi. Così, da (11.3.8) segue immediatamente che

12.2.2 - Lemma. *Sia D una dialgebra, N una D-corappresentazione e y un (p,q)-albero. La famiglia $CY^{y}_{p,q+*}(D,N)$ è chiusa per le facce verticali se e solo se y è un $(p,*)$-albero $/$-minimale.*

Dimostrazione. Dobbiamo solo mostrare che ogni $d^v_i : CY_{p,q+m}(D,N) \longrightarrow CY_{p,q+m-1}(D,N)$, ristretto a $CY^{y}_{p,q+m}(D,N)$, assume valori in $CY^{y}_{p,q+m-1}(D,N)$.

Sia $y' \otimes \underline{a}$ un elemento di $CY^{y}_{p,q+m}(D,N)$. Allora ogni d^v_i agisce come $d^v_i(y' \otimes \underline{a}) = d^v_i(y') \otimes d^{y'}_i(\underline{a})$. Perciò $d^v_i(y' \otimes \underline{a})$ appartiene a $CY^{y}_{p,q+m-1}(D,M)$ se e solo se $d^v_i(y')$ appartiene a $Y^{y}_{p,q+m-1}$. Ciò vale, quando y è un $(p,*)$-albero $/$-minimale, per il lemma (11.3.8). □

12.2.3 - Proposizione. *Sia D una dialgebra ed N una D-corappresentazione. Per ogni $p \geq 0$, il complesso verticale $(CY_{p,q+*}(D,N), d^v)$ si decompone in somma diretta di sottocomplessi,*

$$CY_{p,q+*}(D,N) = \bigoplus_{y \in Y_p} CY^{\tilde{y}}_{p,q+*}(D,N).$$

Perciò nel piano E^1 della sequenza spettrale (12.1.4) si ha

$$E^1_{pq} = \bigoplus_{y \in Y_p} H_q(CY^{\tilde{y}}_{p,*}(D,N), d^v).$$

Dimostrazione. Sappiamo già che i k-moduli $CY^{\tilde{y}}_{p,*}(D,N)$ sono sottocomplessi di $CY_{p,*}(D,N)$. Per costruzione, è ovvio che la somma è diretta, perciò rimane da mostrare che è uguale (e non più piccola) al complesso verticale, cioè che per ogni $y \otimes \underline{a} \in CY_{p,q}(D,N)$, esiste un albero $y' \in Y_{p'}$ tale che $y \otimes \underline{a} \in CY^{\tilde{y}'}_{p,q+m}(D,N)$ per qualche $m \geq 0$.

Poiché $y \otimes \underline{a} \in CY_{p,q}(D,N)$ se e solo se $y \in Y_{p,q}$, sappiamo che il problema non coinvolge la struttura di dialgebra di D. Poniamo $y' := \psi(y) \in Y_p$. Allora per (11.3.11) sappiamo che $y \otimes \underline{a} \in CY^{\tilde{y}'}_{p,q_{y'}+m}(D,N)$. □

La proposizione (12.2.3) determina l'omologia verticale del bicomplesso di dialgebra $CY_{**}(M)$ a partire dall'omologia dei suoi addendi diretti definiti in (12.2.1). Descriviamo ora questi sottocomplessi.

12.2.4 - Lemma. *Sia D una dialgebra e N una D-corappresentazione. Consideriamo un p-albero y, con $p > 0$, e il suo $(p,*)$-albero $/$-minimale associato $\tilde{y} \in Y_{p,q_y}$. Il complesso verticale $CY^{\tilde{y}}_{p,q_y+*}(D,N)$ è il complesso totale di un multi-complesso con dimensione $d = 2p+1$.*

Dimostrazione. Segue dalla proposizione (11.3.12). □

12.2.5 - Omologia totale di un multicomplesso. Diamo qualche indicazione su come calcolare l'omologia totale di un multicomplesso con dimensione $d = 2p+1$, per $p \geq 1$.

Indichiamo con I, II, III, ..., le d direzioni degli operatori di bordo. Ciascuna coppia di direzioni determina un piano, cioè un bicomplesso, la cui omologia totale si calcola con una sequenza spettrale. Abbiamo quindi $d-1$ sequenze spettrali

$$H^I_r H^{II}_s \Longrightarrow H^{I,II}_{r+s}\ ,\quad H^{III}_t H^{I,II}_z \Longrightarrow H^{I,II,III}_{t+z}\ ,\quad ...$$

di cui l'ultima converge all'omologia totale del multicomplesso.

Si noti che ogni sequenza converge ad un termine che si calcola, come al solito, con l'aiuto della sequenza esatta determinata dalla sua filtrazione. Per esempio, l'omologia $H^{\mathrm{I,II}}_z$ si calcola così. Posto $A^2_{rs} := H^{\mathrm{I}}_r H^{\mathrm{II}}_s$ il termine iniziale, allora cè una filtrazione $F_p H^{\mathrm{I,II}}_z$ tale che

$$F_z H^{\mathrm{I,II}}_z = H^{\mathrm{I,II}}_z \quad \text{e} \quad A^\infty_{rs} \cong F_r H^{\mathrm{I,II}}_{r,s} / F_{r-1} H^{\mathrm{I,II}}_{r,s}.$$

Quindi dalla sequenza esatta

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow F_0 H^{\mathrm{I,II}}_0 = H^{\mathrm{I,II}}_0 \longrightarrow A^\infty_{00} \longrightarrow 0$$

si ottiene $H_0^{\mathrm{I,II}} \cong A_{00}^{\infty}$. Dalle due sequenze esatte

$$0 \longrightarrow F_0 H_1^{\mathrm{I,II}} \longrightarrow F_1 H_1^{\mathrm{I,II}} = H_1^{\mathrm{I,II}} \longrightarrow A_{10}^{\infty} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow F_0 H_1^{\mathrm{I,II}} \longrightarrow A_{01}^{\infty} \longrightarrow 0$$

si ottiene $H_1^{\mathrm{I,II}} \cong A_{10}^{\infty} \oplus A_{01}^{\infty}$, e così via.

12.3 Omologia di dialgebra come funtore derivato.

12.3.1 - Teorema. *Sia D una dialgebra, $E(D)$ la sua algebra inviluppo universale ed N una corappresentazione di D. Allora esiste un isomorfismo*

$$HY_n(D, N) \cong \mathrm{Tor}_n^{E(D)}(N, M(D))$$

dove l'$E(D)$-modulo sinistro $M(D) := E(D)/\langle u - v\rangle$ è il quoziente di $E(D)$ sull'immagine dell'operatore di bordo $d : E(D) \otimes D \longrightarrow E(D), e \otimes a \mapsto e(u(a) - v(a))$. Dualmente, data una rappresentazione M di D, esiste un isomorfismo

$$HY^n(D, M) \cong \mathrm{Ext}^n_{E(D)}(M(D), M),$$

per ogni $n \geq 0$.

Dimostrazione. Consideriamo il complesso di catene cotangente della dialgebra D, $EY_n(D) = k[Y_n] \otimes E(D) \otimes D^{\otimes n}$. Se N è una corappresentazione di D, si ha un isomorfismo di complessi

$$CY_*(D, N) \cong N \otimes_{E(D)} EY_*(D).$$

I moduli di catene $EY_n(D)$ sono liberi su $E(D)$, quindi proiettivi. Pertanto l'interpretazione Tor per l'omologia di dialgebra segue dal fatto che $EY_*(D)$ è una risoluzione di $M(D)$, risultato che viene dimostrato nel prossimo lemma. Il secondo asserto segue immediatamente dalla dualità fra omologia e coomologia. □

12.3.2 - Lemma. *Sia D una dialgebra, e $E(D)$ la sua algebra inviluppo universale. Allora*

$$HY_n(D, E(D)) = 0$$

per ogni $n \geq 1$, e $HY_0(D, E(D)) \cong E(D)/\langle u - v\rangle$.

Dimostrazione. Consideriamo il complesso cotangente di D, $EY_n(D) = k[Y_n] \otimes E(D) \otimes D^{\otimes n}$ e il suo complesso graduato $GrEY_*(D) = \bigoplus_{k\geq 0} Gr^k EY_*(D)$ dove $Gr^0 EY_*(D) = F_0 EY_*(D)$ e $Gr^k EY_*(D) = F_k EY_*(D)/F_{k-1} EY_*(D)$ per $k \geq 1$. Poiché $F_0 EY_n(D) = k$, per $n = 0$, e si annulla per $n \geq 1$, sappiamo che $H_n(F_0 EY_*(D)) = 0$ per ogni $n \geq 1$. Per la proposizione (7.6.2), sappiamo che $GrEY_*(D) \cong EY_*(V)$, dove V è la dialgebra abeliana sul k-modulo sottostante di D. Nel prossimo lemma (12.3.3), mostriamo che $H_n(GrEY_*(D)) = H_n(EY_*(V)) = 0$. Quindi da $H_n(F_0 EY_*(D)) = 0$ e $H_n(F_1 EY_*(D)/F_0 EY_*(D)) = 0$ si deduce che $H_n(F_1 EY_*(D)) = 0$ per ogni $n \geq 1$. Nella stessa maniera si dimostra che $H_n(F_k EY_*(D)) = 0$ per ogni $n \geq 1$ e $k \geq 0$. Quindi $H_n(\bigoplus_{k\geq 0} F_k EY_*(D)) = 0$ per ogni $n \geq 1$ □

12.3.3 - Lemma. *Sia D una dialgebra abeliana, ed $E(D)$ la sua algebra inviluppo universale. Allora*

$$HY_n(D, E(D)) = 0$$

per ogni $n \geq 1$, e $HY_0(D, E(D)) \cong E(D)/\langle u - v\rangle$.

Dimostrazione. Consideriamo il bicomplesso $EY_{p,q}(D) = k[Y_{p,q}] \otimes E(D) \otimes D^{\otimes p+q+1}$ che dà luogo alla sequenza spettrale $E^2_{pq} \Longrightarrow HY_{p+q+1}(D, E(D))$ convergente all'omologia dialgebra di D. Poiché D è una dialgebra abeliana, le uniche facce non-nulle sono la prima e l'ultima, quindi $d = d_0 + (-1)^n d_n$. Queste agiscono su un elemento generico di $EY_{p,q}(D)$ come

$$d_0^y(e \otimes (a_1, ..., a_n)) = \begin{cases} e \cdot x(a_1) \otimes (a_2, .., a_n) \\ \\ e \cdot u(a_1) \otimes (a_2, .., a_n) \end{cases}$$

a seconda della forma della prima foglia dell'albero y (qui $n = p + q + 1$), e

$$d_n^y(e \otimes (a_1, ..., a_n)) = \begin{cases} e \cdot y(a_n) \otimes (a_1, .., a_{n-1}) \\ \\ e \cdot v(a_n) \otimes (a_1, .., a_{n-1}) \end{cases}$$

a seconda della forma dell'ultima foglia dell'albero y. Gli operatori di bordo orizzontale e verticale sono tali che $d = d^h + d^v$, quindi le due facce non-nulle sono distribuite in d^h e d^v nelle quattro evidenti possibili combinazioni.

1) Calcoliamo il piano E^1,

$$E^1_{pq} = H_q(EY_{p,*}(D), d^v) = \bigoplus_{y \in Y_p} H_q(EY^{\tilde{y}}_{p,*}(D), d^v).$$

• Per $p = 0$ entrambe le facce non nulle sono ovviamente verticali, e, vista la forma degli alberi a pettine, agiscono sempre moltiplicando gli elementi $x(a_1)$ e $v(a_n)$. Quindi la torre verticale per $p = 0$ è il complesso

$$\cdots \longrightarrow E(D) \otimes D^{\otimes n} \xrightarrow{x \pm v} E(D) \otimes D^{\otimes n-1} \xrightarrow{x \mp v} \cdots \xrightarrow{x - v} E(D) \otimes D^{\otimes 2} \xrightarrow{x + v} E(D) \otimes D,$$

(confrontare con il disegno (11.4.1)). Quindi, per $q = 0$, otteniamo

$$E^1_{00} = H_0(EY_{0,*}(D), d^v) \cong \frac{E(D) \otimes D}{\langle x(a) \otimes b + v(b) \otimes a\rangle}.$$

Per $q = 1$, si vede che il nucleo della mappa $e \otimes (a, b) \mapsto ex(a) \otimes b + ev(b) \otimes a$ è precisamente l'$E(D)$-modulo sinistro di elementi $\langle x(a) \otimes (b, c) - v(c) \otimes (a, b)\rangle$, quindi

$$E^1_{01} = H_1(EY_{0,*}(D), d^v) = 0.$$

Inoltre, per $q > 1$, otteniamo

$$E^1_{0q} \cong E^1_{01} \otimes D^{\otimes q-1} = 0.$$

• Per $p \geq 1$ osserviamo immediatamente che su ogni copia $E(D) \otimes D^{\otimes p+q+1}$, corrispondente al (p, q)-albero y, le due facce non nulle sono necessariamente distribuite una in d^h e l'altra in d^v. Quindi, quando consideriamo una torre verticale $(2p + 1)$-dimensionale, su ogni copia

$E(D) \otimes D^{\otimes p+q+1}$ il bordo verticale consiste solo della moltiplicazione a destra in $E(D)$ per un elemento fra $x(a_1)$, $u(a_1)$, $y(a_n)$, o $v(a_n)$. Diamo più dettagli per $p = 1$.

L'omologia totale della torre verticale 3-dimensionale disegnata in (11.4.2) dove ogni $(1, q)$-albero corrisponde al modulo di catene $E(D) \otimes D^{\otimes q+2}$, può essere trovata con due sequenze spettrali (si veda (12.2.5)). La prima,

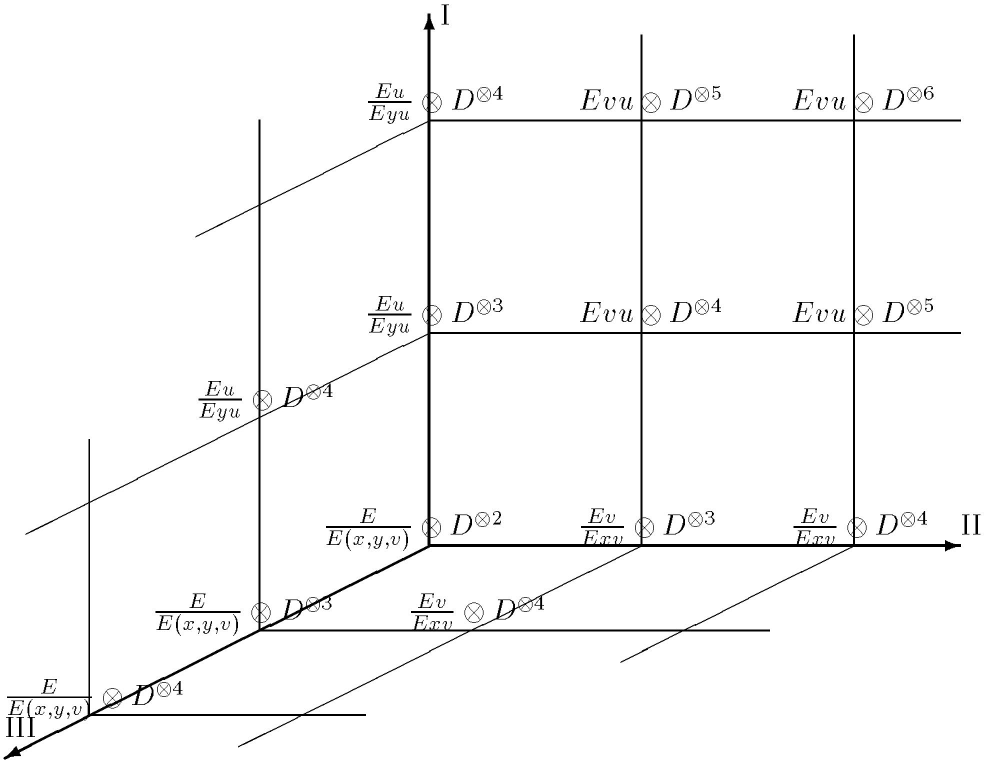
$$A^2_{rs} := H^{\mathrm{II}}_r H^{\mathrm{I}}_s \Longrightarrow H^{\mathrm{I,II}}_{r+s}(EY_{1,*}(D)),$$

converge all'omologia totale del bicomplesso determinato dal piano I, II; e la seconda

$$B^2_{tz} := H^{\mathrm{III}}_t H^{\mathrm{I,II}}_z \Longrightarrow H^{\mathrm{I,II,III}}_{t+z}(EY_{1,*}(D), d^v)$$

converge all'omologia totale del 3-complesso.

La prima sequenza spettrale ha piano stabile $A^\infty_{rs} = A^2_{rs}$ e omologia $H^{\mathrm{I,II}}_z = \bigoplus_{r+s=z} A^2_{rs}$. La seconda sequenza spettrale ha piano stabile $B^\infty_{tz} = B^2_{tz}$ descritto nel prossimo disegno. Si noti che i bordi, nelle tre direzioni I, II e III, sono il prodotto per i termini $x(a_1)$, $(-1)^n y(a_n)$ e $(-1)^n v(a_n)$.



Omologia della torre verticale di base $\curlyvee$.

Con queste notazioni intendiamo

$$\tfrac{E}{E(x,y,v)} = E(D)/\langle ex(a), ey(a), ey(a) \mid e \in E(D), a \in D\rangle,$$

$$\tfrac{Eu}{Eyu} = \tfrac{\{eu(a) \mid e \in E(D), a \in D\}}{\{ey(a)u(b) \mid e \in E(D), a, b \in D\}},$$

$$Evu = \{ev(a)u(b) \mid e \in E(D), a, b \in D\}.$$

Perciò otteniamo

$$E^1_{10} = \tfrac{E}{E(x,y,v)} \otimes D^{\otimes 2},$$

$$E^1_{11} = \tfrac{Eu}{Eyu} \otimes D^{\otimes 3} \oplus \tfrac{Ev}{Exv} \otimes D^{\otimes 3} \oplus \tfrac{E}{E(x,y,v)} \otimes D^{\otimes 3},$$

e i termini superiori E^1_{1q} sono somme dirette di copie dei termini $\frac{Eu}{Eyu} \otimes D^{\otimes q+2}$, $Evu \otimes D^{\otimes q+2}$, $\frac{Ev}{Exv} \otimes D^{\otimes q+2}$, $\frac{E}{E(x,y,v)} \otimes D^{\otimes q+2}$.

Per $p \geq 2$ troviamo un risultato simile, usando una sequenza spettrale $(2p+1)$-dimensionale su ogni torre verticale.

2) Quando calcoliamo il termine E^2 della sequenza spettrale,

$$E^2_{pq} = H_p(E^1_{*q}, (d^h)_*) = H_p H_q(EY_{*,*}(D)),$$

si ha una situazione simile. Ogni (p,q)-albero y corrisponde ora a un quoziente o ad un sottomodulo di $E(D) \otimes D^{\otimes p+q+1}$. Si verifica che l'omologia orizzontale di questi termini è nulla, eccetto nel grado $(0,0)$, quindi

$$HY_n(D, E(D)) = 0$$

per ogni $n = p+q+1 \geq 2$. Nel grado $(0,0)$ si ha

$$E^2_{00} = \frac{(E(D) \otimes D)/\langle x(a) \otimes b + v(b) \otimes a\rangle}{\langle u(a) \otimes b + y(b) \otimes a\rangle}.$$

3) Infine osserviamo il solo termine del complesso di catene di dialgebra che non è coperto dal bicomplesso, cioè l'operatore di bordo $E(D) \otimes D \longrightarrow E(D), e \otimes a \mapsto e(u(a) - v(a))$. La mappa indotta $E^2_{00} \longrightarrow E(D)$ ha nucleo nullo, quindi

$$HY_1(D, E(D)) = 0,$$

e il conucleo è $HY_n(D, E(D)) \cong E(D)/\langle u - v\rangle$. □

12.4 Omologia di dialgebra delle algebre associative H-unitarie.

Le algebre associative senza unità sono dialgebre senza bar-unità. Per studiare la loro omologia di dialgebra dobbiamo fare uso della sequenza spettrale. Anche se decomponiamo il piano E^1 in una somma diretta di complessi, l'omologia totale del bicomplesso di catene descritto precedentemente non è facile da descrivere, poiché i complessi verticali, come abbiamo visto, sono essi stessi multi-complessi con dimensione crescente. Una classe di algebre per le quali i calcoli sono particolarmente semplici, poiché quasi tutti i termini del piano E^1 sono già nulli, è quella delle algebre omologicamente unitarie.

Per le algebre associative, la proprietà di avere una unità è più forte della proprietà di avere il complesso bar aciclico. Un'algebra A tale che $H_*(A) = 0$, senza necessariamente avere una unità, è chiamata *omologicamente unitaria*, o *H-unitaria*. L'importanza delle algebre H-unitarie è legata alle estensioni delle algebre unitarie, poiché il nucleo di tali estensioni non può evidentemente avere una unità. È stato provato da Wodzicki ([W], [L1]), che l'H-unitarietà è equivalente alla proprietà di eccisione per l'omologia di Hochschild.

Nel capitolo 8 abbiamo dimostrato che per le algebre associative unitarie esiste un isomorfismo fra omologia di dialgebra e di Hochschild a coefficienti in bimoduli unitari (vedere il teorema (8.4.1)). Possiamo ora estendere questo risultato alla classe delle algebre H-unitarie.

12.4.1 - Teorema. *Sia A un'algebra associativa H-unitaria ed M un A-bimodulo. Allora l'omologia di dialgebra di A a coefficienti in M è isomorfa all'omologia di Hochschild di A, cioè*

$$HY_n(A, M) \cong H_n(A, M),$$

per ogni $n \geq 0$.

Dimostrazione. Consideriamo il bicomplesso $CY_{p,q}(A, M) = k[Y_{p,q}] \otimes M \otimes A^{\otimes p+q+1}$ che dà luogo alla sequenza spettrale convergente all'omologia di dialgebra di A.

1) Calcoliamo il piano E^1,

$$E^1_{pq} = \bigoplus_{y \in Y_p} H_q(CY^{\tilde{y}}_{p,*}(A, M), d^v).$$

• Per $p = 0$, il complesso verticale $CY_{0,q}(A, M)$ è isomorfo al complesso di Hochschild di A traslato di 1. Quindi

$$E^1_{00} = \operatorname{coker}(M \otimes A^{\otimes 2} \longrightarrow M \otimes A)$$

e

$$E^1_{0q} \cong H_{q+1}(A, M)$$

per ogni $q \geq 1$.

• Per $p \geq 1$ si osserva che nel multicomplesso $CY_{p,*}(A, M)$ ogni operatore di bordo verticale contiene o la prima faccia d_0, o l'ultima d_{p+1+*}, o nessuna delle due. In sostanza la prima e l'ultima faccia non appaiono mai assieme. Ciò significa che l'omologia lungo ogni direzione della torre verticale è di fatto un'omologia bar per A, e quindi per ipotesi è nulla. Dunque l'omologia totale di ogni torre verticale è nulla, e rimane solo

$$E^1_{p0} \cong \bar{M} \otimes_A A \otimes_A \cdots \otimes_A A,$$

dove $\bar{M} = M/AM$ è il modulo dei coinvarianti di M per l'azione sinistra di A, e

$$E^1_{pq} = 0$$

per ogni $q \geq 1$.

2) L'unico bordo non nullo che rimane è dunque

$$\cdots \longrightarrow E^1_{p0} \longrightarrow E^1_{p-10} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^1_{p0},$$

dove $E^1_{p0} \cong \bar{M} \otimes_A A \otimes_A \cdots \otimes_A A$. L'omologia di questo complesso è

$$\tilde{M} \otimes A/A^2 \otimes \cdots A/A^2,$$

dove $\tilde{M} = \bar{M}/MA$ è il modulo dei coinvarianti di M per entrambe le azioni sinsitra e destra di A. Quest'omologia è chiaramente zero, dal momento che l'algebra A è presa H-unitaria. In conclusione, gli unici termini non nulli del piano E^2 sono dati dal complesso verticale per $p = 0$.

3) Infine, considerando anche l'omologia della mappa esterna al bicomplesso,

$$\cdots \longrightarrow E^1_{01} \longrightarrow E^1_{00} \longrightarrow M,$$

si ottiene l'isomorfismo $HY_n(A, M) \cong H_n(A, M)$ per ogni $n \geq 0$. □

12.4.2 - Omologia di dialgebra dell'algebra associativa libera non unitaria. Sia $Ass(V) = \bar{T}(V) = V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots$ l'algebra associativa non unitaria libera su un k-modulo V (vedere il capitolo 1). È noto che l'omologia di Hochschild si annulla sull'algebra libera dal gruppo del secondo ordine in poi, cioè

$$HH_n(\bar{T}(V)) = 0, \quad \text{per } n \geq 2.$$

Questa condizione, al contrario della condizione più forte che caratterizza le algebre H-unitarie, non è sufficiente per semplificare il piano E^1 della sequenza spettrale e permetterci di calcolare completamente l'omologia di dialgebra dell'algebra associativa libera. Comunque abbiamo calcolato il primo termine, in piccola dimensione, e trovato che l'omologia di dialgebra *non si annulla* sull'algebra associative libera, cioè

$$\begin{aligned}
&HHY_0(\bar{T}(V)) \cong HH_0(\bar{T}(V)) = \textstyle\bigoplus_{n\geq 1} V^{\otimes n}/(id - \tau) \quad \text{(coinvarianti)},\\
&HHY_1(\bar{T}(V)) \cong HH_1(\bar{T}(V)) = \textstyle\bigoplus_{n\geq 2} (V^{\otimes n})^{\tau} \quad \text{(invarianti)},\\
&HHY_2(\bar{T}(V)) = V^{\otimes 3},\\
&HHY_3(\bar{T}(V)) = 2V^{\otimes 4},\\
&HHY_4(\bar{T}(V)) = 3V^{\otimes 5}.
\end{aligned}$$

12.5 Dialgebre HY-unitarie.

La nozione di algebra omologicamente unitaria può essere estesa naturalmente alla categoria delle dialgebre.

12.5.1 - Dialgebre HY-unitarie. Una dialgebra D è detta *HY-unitaria* se $HY_n(D) = 0$ per tutti gli $n \geq 1$. Il teorema (2.3.1) implica che le dialgebre bar-unitarie sono HY-unitarie.

Un esempio standard di dialgebra HY-unitaria che non ha bar-unità è fornito dal limite induttivo $\mathrm{M}(D) = \mathrm{M}_{r\to\infty}(D)$ delle inclusioni di dialgebre di matrici $\mathrm{M}_r(D) \hookrightarrow \mathrm{M}_{r+1}(D)$ con coefficienti in una dialgebra bar-unitaria. L'identità $HY_*(\mathrm{M}(D)) = 0$ è una consequenza dell'invarianza di Morita dell'omologia di dialgebra per matrici, cioè $HY_*(\mathrm{M}(D)) \cong HY_*(D)$, che è stata dimostrata nel capitolo 8, teorema (8.5.1).

Da (12.4.1) segue immediatamente che un'algebra associativa che sia H-unitaria è anche HY-unitaria. Mostriamo ora che anche l'inverso è vero.

12.5.2 - Teorema. *Sia A un'algebra associativa. Allora A è H-unitaria se e solo se A è HY-unitaria, cioè*

$$H_*(A) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad HY_*(A) = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $HY_n(A) = 0$ per ogni $n \geq 1$. In (7.7.2) abbiamo osservato che $H_0(A, k) \cong HY_0(A, k) = k$, dove k è il bimodulo triviale su A, e $H_1(A) \cong HY_1(A)$, che è zero per ipotesi. Mostriamo che $H_n(A) = 0$ ricorsivamente sull'ordine n.

Consideriamo il bicomplesso indotto dagli alberi orientati. Da un lato sappiamo che $HY_n(A)$ è l'omologia totale di questo bicomplesso, e dall'altro che ogni complesso verticale ha l'omologia data per mezzo dei gruppi di omologia di Hochschild a piccoli ordini.

In particolare, $HY_2(A)$ è la somma diretta di $H_2(A)$, nella posizione $(0,1)$ del bicomplesso, e di termini addizionali che contengono solo $H_1(A)$, piazzati nella posizione $(1,0)$. Poiché $HY_2(A)$ è zero per ipotesi, e $H_1(A) \cong HY_1(A) = 0$, otteniamo anche $H_2(A) = 0$.

Analogamente, $HY_3(A)$ è la somma diretta di $H_3(A)$, nella posizione $(0,2)$ del bicomplesso, e di termini addizionali che coinvolgono solo $H_1(A)$ e $H_2(A)$, piazzati nelle posizioni $(1,1)$ e $(2,0)$. Quindi $H_3(A) = 0$. In questo modo, procedendo passo per passo, si ottiene $H_n(A) = 0$ per tutti gli $n > 0$. $\square$

Bibliography

[C] **Cuvier, C.** *Homologie de Leibniz et Homologie de Hochschild*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.**27** (1994), 1-45.

[E-Z1] **Eilenberg S. - Zilber. J.A.** *Semi-simplicial complexes and singular homology*, Ann. of Math. **51**, 3, (1950), 499-513.

[E-Z2] **Eilenberg S. - Zilber. J.A.** *On product of complexes*, Amer. Journ. Math. **75**, (1953), 201-204.

[E-ML] **Eilenberg S. - MacLane S.** *Acyclic models*, Amer. Journ. Math. **75**, (1953), 189-199.

[F1] **Frabetti, A.** *Leibniz homology of dialgebras of matrices*, Preprint Journ. Pure Appl. Alg., (1997).

[F2] **Frabetti, A.** *Dialgebra homology of associative algebras*, Preprint C. R. Acad. Sci. Paris, (1997).

[F3] **Frabetti, A.** *Homology of disimplicial modules*, in preparation, (1997).

[Fr] **Fresse, B.** *Cogroups in Algebras over an Operad are Free Algebras*, Preprint I.R.M.A., (1996).

[G-K] **Ginzburg, V - Kapranov, M.M.** *Koszul duality for operads*, Duke Math. J. **76**, (1994), 203-272.

[H] **Hanlon, P.** *On the complete $GL_n(\mathbf{C})$-decomposition of the stable cohomology of $gl_n(A)$*, Trans. A. M. S. (1) **308** (1988), 209-225.

[I] **Inasaridze, K. N.** *Homology of pseudo-simplicial groups, nonabelian derived functors and algebraic K-theory*, Math. Sbornik, T. **98 (140)**, 241 **3 (11)**, (1975), 339-362.

[K] **Koszul, J.-L.** *Crochet de Schouten-Nijenhuis et Cohomologie*, Soc. Mat. Fr. Asterisque, hors série, (1985), 257-271.

[KS] **Kosmann-Schwarzbach, Y.** *From Poisson Algebras to Gerstenhaber Algebras*, Ann. Inst. Fourier 46 (1996) 1241-1272.

[L1] **Loday, J.-L.** *Cyclic Homology*, Grundlehren der math. Wissenschaften **301**, Springer-Verlag, 1992.

[L2] **Loday, J.-L.** *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz*, Ensegn. Math., **321** (1993), 269-293.

[L3] **Loday, J.-L.** *La renaissence des opérades*, Exposé **792** Sém. Bourbaki (1994) Astérisque **237** (1996), 47-74.

[L4] **Loday, J.-L.** *Künneth-style formula for the homology of Leibniz algebras*, Math. Zeit. **221** (1996) 41-47.

[L5] **Loday, J.-L.** *Algèbres ayant deux operations associatives (digèbres)*, C. R. Acad. Sci. Paris **321** (1995), 141-146.

[L6] **Loday, J.-L.** *Dialgebras*, In preparation, (1996).

[L-P] **Loday, J.-L. - Pirashvili, T.** *Universal Enveloping Algebras of Leibniz Algebras and (Co)homology*, Math. Annalen **296** (1993), 569-572.

[L-PR] **Loday, J.-L. - Procesi, C.** *Homology of symplectic and orthogonal algebras*, Advances in Math. **69** (1988), 93-108.

[L-Q] **Loday, J.-L. - Quillen, D.** *Cyclic Homology and the Lie Algebra Homology of Matrices*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), 565-591.

[LO] **Lodder, J.** *Leibniz Homology and the James Model*, Math. Nachr. **175** (1995), 209-229.

[P] **Pirashvili, T.** *On Leibniz homology*, Ann. Inst. Fourier, **44**, 2 (1994), 401-411.

[Q] **Quillen, D.** *On the (co)homology of commutative rings*, Proc. Symp. Pure Math. **XVII** (1968), 65-87.

[R] **Richter, B.** *Diplomarbeit der Universität Bonn*, (2/1997).

[T] **Tsygan, B. L.** *The homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homologie* (in russian), Uspekhi Mat. Nauk **38** (1983), 217-218; Russ. Math. Survey **38** No. 2 (1983), 198-199.

[T-V] **Tierney, M. - Vogel, W.** *Simplicial Derived Functors* in "Category theory, homology theory and applications", Springer L.N.M. **68** (1969), 167-179.

[W] **Wodzicki, M.** *Excision in cyclic homology and in rational algebraic K-theory*, Ann. Math. **129** (1989), 591-639.