Homologie des digèbres

Alessandra Frabetti

Introduction

Les digèbres ont été introduites par J.-L. Loday comme version 'associative' des algèbres de Leibniz [L3]. Loday a été motivé par la recherche d'une 'obstruction' à la périodicité de la K-théorie algébrique. Il est bien connu que la K-théorie algébrique ne satisfait pas au théorème de périodicité valable, au contraire, pour sa version topologique [Bott]. Rappelons que l'homologie cyclique des algèbres associatives peut être considéré comme une version 'additive' ou 'infinitésimale' de la K-théorie algébrique rationelle, grâce aux deux résultats suivantes:

- $\bigwedge(K_*(A)_{\mathbf{Q}}) \cong H_*^{gr}(GL(A), \mathbf{Q}) \cong H_*^{Hoch}(\mathbf{Q}[GL(A)], \mathbf{Q})$, [Quillen]
- $\bigwedge(HC_{*-1}(A)) \cong H_*^{Lie}(\mathfrak{gl}(A), \mathbf{Q})$, [Loday-Quillen]

valables pour une algèbre associative unitaire A. La long suite exacte

- $\cdots \longrightarrow HH_n(A) \longrightarrow HC_n(A) \longrightarrow HC_{n-2}(A) \longrightarrow \cdots$, [Connes]

nous permet de interpréter l'homologie de Hochschild HH_* comme obstruction à la périodicité de l'homologie cyclique. On se pose donc une question naturelle: y-a-t-il une théorie KX_* (où X veut dire 'inconnu', pour le moment) analogue à HH_* qui donne une suite exacte $\cdots \longrightarrow KX_n(A) \longrightarrow K_n(A) \longrightarrow K_{n-2}(A) \longrightarrow \cdots$ pour les algèbres associatives unitaires?

La découverte des algèbres de Leibniz, et de leur homologie naturelle HL_*, a dégagé une nouvelle relation

- $T(HH_{*-1}(A)) \cong HL_*(\mathfrak{gl}(A), \mathbf{Q})$, [Cuvier-Loday].

Puisque l'homologie des algèbres de Lie peut être recouvré à partir de l'homologie des algèbres associatives grâce à la formule

- $H_*^{Lie}(\mathfrak{g}, U\mathfrak{g}^{ad}) \cong HH_*(U\mathfrak{g})$,

où $U\mathfrak{g}$ est l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, la question précédente invite à la recherche d'une homologie HX_* telle que $HL_*(\mathfrak{g}, UX\mathfrak{g}^{ad}) \cong HHX_*(UX\mathfrak{g})$, pour un type d'algèbre $UX\mathfrak{g}$ qui a la même homologie de l'algèbre associative $U\mathfrak{g}$ lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie. Ensuite, l'idée est de définir $KX_*(A)$ tel que $T(KX_*(A)_{\mathbf{Q}}) \cong HX_*(\mathbf{Q}[GL(A)], \mathbf{Q})$, et de le comparer avec $K_*(A)$.

Le début de ce programme a été fait par Loday, qui a défini la version 'associative' des algèbres de leibniz, les digèbres, et leur théorie d'homologie naturelle, noté par HY_* [L3]. On résùme, içi, les résultats qu'on été trouvé ensuite, contenues dans [F3].

Index

1 Digèbres

1.1 - Digèbres... Soit k un corps commutatif, A une algèbre associative sur k et $d : A \longrightarrow A$ une dérivation de A de carré nul. Avec ces hypothèses, il est facile de vérifier que si on pose $a \dashv b := a \cdot d(b)$ et $a \vdash b := d(a) \cdot b$, (avec un signe appoprié si A est une algèbre graduée), les deux symbols $\dashv$ et $\vdash$ définissent deux opérations binaire sur A, qui satisfont aux proprietés suivantes:

$$(D) \quad \begin{cases} a \dashv (b \dashv c) \overset{1}{=} (a \dashv b) \dashv c \overset{2}{=} a \dashv (b \vdash c) \\ (a \vdash b) \dashv c \overset{3}{=} a \vdash (b \dashv c) \\ (a \dashv b) \vdash c \overset{4}{=} a \vdash (b \vdash c) \overset{5}{=} (a \vdash b) \vdash c, \end{cases}$$

pour tout $a, b, c \in A$. Une telle structure constitue un exemple de digèbre.

Par définition, une *digèbre* sur k est un k-module D muni de deux opérations binaires $\dashv$ et $\vdash$ qui satisfont aux relations (D). L'exemple typique de digèbre est celui dont les produits gauche et droite coincident: les 5 identités (D) répètent la propriété associative de cet unique produit, donc les digèbres avec $\dashv = \vdash$ sont les algèbres associatives (sans unité).

1.2 - ...et algèbres de Leibniz. La particularité des digèbres est d'"être aux algèbres de Leibniz comme les algèbres associativs sont aux algèbres de Lie". Une *algèbre de Leibniz* est un k-module $\mathfrak{g}$ muni de une opération binaire $[\ ,\ ]$ qui satisfait à l'axiome

$$(L) \quad [x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y].$$

Une algèbre de Leibniz qui est antisymétrique, c'est-à-dire $[x, x] = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$, est une algèbre de Lie. Un exemple non trivial d'algèbre de Leibniz se construit à partir d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ munie d'une dérivation d de carré nul. En effet le *crochet dérivé* $[x, y]_d := [x, dy]$ satisfait à (L) mais n'est pas antisymétrique.

Etant donné une digèbre D, si on pose

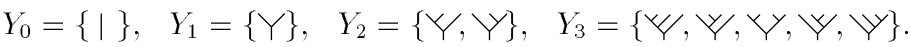
$$[a, b] := a \dashv b - b \vdash a$$

on définit une structure de Leibniz sur le k-module D, qui sera noté par D_L. On remarquera que l'algèbre de Leibniz associée à la digèbre construite sur une algèbre associative différentielle (A, d) coincide avec l'algèbre de Leibniz derivée de l'algèbre de Lie differentiélle $(\mathfrak{g}, d)$, où $\mathfrak{g} = A_L$ est l'algèbre de Lie associée à A.

2 Homologie des digèbres

Il surgit donc un problème naturel: comparer l'homologie d'une digèbre avec l'homologie de son algèbre de Leibniz associée. Les premiers pas ont été faits par J.-L. Loday, qui a construit la bar homologie des digèbres à partir exclusivement des relations (D) en basses dimensions [L3]. Le bord $d' : D^{\otimes n} \longrightarrow D^{\otimes n-1}$ est tel que la composition $D^{\otimes 3} \longrightarrow D^{\otimes 2} \longrightarrow D$ soit identiquement nulle à cause des relations (D). Il est évident, donc, que le module des chaînes en dimension 3 doit être 5 copies de $D^{\otimes 3}$, une pour chaque égalité de (D), et celui en dimension 2 doit être 2 copies de $D^{\otimes 2}$, une pour chaque opération.

2.1 - Arbres planaires et binaires. Pour tout nombre naturel n, on considère l'ensemble Y_n des *arbres planaires et binaires* avec une racine et $n+1$ feuilles:



Un élément de Y_n est appellée n-arbre, et ces feuilles seront numerotées de gauche à droite de 0 à n. La cardinalité de l'ensemble Y_n est donné par le nombre de Catalan $c_n = \frac{2n!}{n!(n+1)!}$, qui vaut $1, 1, 2, 5, 14, 42$ et ainsi de suite, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$. On peut munir les ensembles Y_n d'operateurs faces $d_i : Y_n \longrightarrow Y_{n-1}$, pour chaque $i = 0, \ldots, n$, qui èlimine la i-ème feuille d'un arbre. Ces operateurs satisfont aux relations

(d) $\quad d_i d_j = d_{j-1} d_i$, pour tout $i < j$,

donc l'application linéaire $d : k[Y_n] \longrightarrow k[Y_{n-1}]$, définie par $d = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$, satisfait à l'identité $d \circ d = 0$. Enfin $(k[Y_*], d)$ définit un complexe de chaînes.

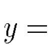
2.2 - Homologie des digèbres. Dans [F3] on a introduit la notion de coefficients pour l'homologie et pour la cohomologie des digèbres. Un k-module M est appellé *représentation* d'une digèbre D s'il est muni de quatre actions de D (deux droites et deux gauches) qui satisfont aux relations (D) pour tout choix d'un élément a, b, où c dans M. La catégorie des représentations de D est équivalente à la catégorie des modules à gauches sur un certain anneau unitaire $E(D)$. Par définition, une *coreprésentation* de D est un module à droite sur $E(D)$. En pratique c'est un k-module N muni de quatre actions de D (deux droites $\dashv, \vdash$: $N \otimes D \longrightarrow N$ et deux gauches $\dashv, \vdash$: $D \otimes N \longrightarrow N$), qui satisfont aux 15 axiomes (CD) opportunément déduit de (D).

Etant donné une coreprésentation N de D, les faces décrites ci-dessus peuvent être étendues au *module des n-chaînes de D*,

$$CY_n(D, N) := k[Y_n] \otimes N \otimes D^{\otimes n},$$

en posant, pour $i = 0$:

$$d_0(y \otimes (a_0, a_1, \ldots, a_n)) := d_0(y) \otimes (a_1 \circ_0^y a_0, a_2, \ldots, a_n),$$

où le symbole $\circ_0^y$ vaut $\dashv$ si $y =$ , et $\vdash$ si $y =$ ; pour $i = 1, \ldots, n-1$:

$$d_i(y \otimes (a_0, a_1, \ldots, a_n)) := d_i(y) \otimes (n, a_1, \ldots, a_i \circ_y^i a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

où $\circ_i^y$ vaut $\dashv$, si la i-ème feuille de y est orientée comme \, et vaut $\vdash$, si la i-ème feuille de y est orientée comme /; et finalement, pour $i = n$:

$$d_n(y \otimes (n, a_1, ..., a_n)) := d_n(y) \otimes (n \circ_n^y a_n, a_1, ..., a_{n-1}),$$

où $\circ_n^y$ vaut $\Vdash$ si $y =$, et $\dashV$ si $y =$. D'après les axiomes (D) et (CD) il suit que les relations simpliciales (d) sont encore valable pour $i, j = 0, ..., n$, avec $i < j$, et donc $(CY_*(D, N), d)$ définit un complexe de chaînes, avec $d = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$, dont l'homologie

$$HY_n(D, N) := H_n(CY_*(D, N), d),$$

pour $n \geq 0$, sera appellée *homologie de D à coefficients dans N.*

En particulier, quand $N = k$ est le module trivial (toutes les actions sont nulles), on trouve le complexe de chaines $(CY_n(D), d')$ défini par Loday dans [L2], qui donne la *bar homologie* $HY_n(D)$ de la digèbre D, pour $n \geq 1$. Quand de plus $D = k$, on retrouve le complexe des arbres binaires.

2.3 - Cohomologie des digèbres. Si on prend le dual du complexe de chaînes d'une digèbre, dans la catégorie des modules sur $E(D)$, on obtient le complexe de cochaînes $\delta : CY^n(D, M) \longrightarrow CY^{n+1}(D, M)$, ou

$$CY^n(D, M) := \mathrm{Hom}(k[Y_n] \otimes D^{\otimes n}, M)$$

est l'espace des applications linéaires à valeurs dans une D-représentation M. L'homologie associée

$$HY^n(D, M) := H_n(CY^*(D, M), \delta)$$

est appellée *cohomologie de D à coefficients dans M.*

Dans [F3] on montre que le premier groupe de cohomologie classifie les dérivations de D dans M qui ne sont pas internes, $HY^1(D, M) = \mathrm{Der}(D, M)/\mathrm{Inn}(D, M)$, et que le deuxième groupe de cohomologie classifie les extensions abelienne de digèbre.

Un résultat intéressant sur l'homologie des digèbres est le suivant.

2.4 - Théorème. *Soit D une digèbre avec bar-unité, c'est-à-dire un élément $1 \in D$ qui soit unité de la partie 'bar' des produits ($1 \vdash a = a = a \dashv 1$ pour tout $a \in D$). Alors le bar complexe de D est acyclique, c'est-à-dire $HY_n(D) = 0$, pour tout $n \geq 1$.*

Si on appèlle *HY-unitaire* une digèbre D telle que $HY_*(D) = 0$, ce théorème nous dit que les digèbres unitaires sont HY-unitaires.

3 Structure pseudo-simpliciale

Un complexe simplicial C_* est muni, au-delà des faces d_i qui définissent l'opérateur de bord (grâce aux relations (d) cité ci dessus), des dégénérescences $s_j : C_n \longrightarrow C_{n+1}$ qui satisfont aux propriétés

$$(ds) \quad d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i, & i < j \\ id, & i = j, j+1 \\ s_j d_{i-1}, & i > j+1, \end{cases}$$

et

$(s) \quad s_i s_j = s_{j+1} s_i \ , \ i \leq j.$

Les complexes de chaînes des digèbres sont muni des dégénérescences s_j, mais en general ceci ne satisfont pas aux relations (s). Telles familles de k-modules sont appelée *modules pseudo-simpliciaux.*

3.1 - Module pseudo-simplicial des arbres. On peut munir les ensembles d'arbres Y_n d'opérateurs $s_j : Y_n \longrightarrow Y_{n+1}$ qui bifurquent la j-ème feuille d'un arbre (c'est-à-dire que la remplacent avec la branche $\curlyvee$). Ces dégénérescences sont bien définies pour tout $j = 0, ...n$, satisfaisant aux relations (ds) et aussi aux relations (s) mais seulement pour $i < j$. (Il est evident, en effet, que pour $i = j$ on a toujours une inégalité $s_i s_i \neq s_{i+1} s_i$. Par exemple $s_0 s_0(|) = \curlyvee$ tandis que $s_1 s_0(|) = \curlyvee$.) Les ensembles des arbres determinent donc un module pseudo-simplicial $k[Y_*]$ satisfaisant (s) pour $i < j$.

De plus, on peut définir plusieurs autres operateurs $s : Y_n \longrightarrow Y_{n+1}$ qui satisfont aux relations (ds) (extra-dégénérescences). Par exemple celui défini par

$$s(y) := \curlyvee^{y}.$$

Les extra-dégénérescences sont des homotopies contractiles pour les complexes pre-simplicieaux, donc le complexe $(k[Y_*], d)$ aussi, comme deja son bar complexe associé $(k[Y_*], d')$, est acyclique.

3.2 - Module pseudo-simplicial des digèbres. Si D est une digèbre avec bar-unité 1, et N est une coreprésentation unitaire de D (c'est-à-dire que $1 \dashv n = n = n \vdash 1$ pour tout $n \in N$), alors les modules de chaînes de D peuvent être munis eux aussi de dégénérescences. On prend, pour tout $j = 0, ..., n$, les applications $s_j : CY_n(D, N) \longrightarrow CY_{n+1}(D, N)$ définies par

$$s_j(y \otimes (a_0, a_1, ..., a_n)) := s_j(y) \otimes (a_0, a_1, ..., a_j, 1, a_{j+1}, ..., a_n),$$

où $a_0 \in N$. Ceux-ci satisfont aux relations (ds) et donc la famille de k-modules $CY_n(D, N)$ constitut un module pseudo-simplicial.

Dans cette catégorie de modules il y a des résultats important pour les applications, comme la généralisation suivante du Théorème de Eilenberg-Zilber, conséquence directe du Théorème 1.4 dans [I].

3.3 - Théorème. *Soient M et N deux modules pseudo-simpliciaux, on note par M_* et N_* les complexes de chaînes associées. Alors il y a un isomorphisme en homologie*

$$H_n(M \times N) \cong H_n(M_* \otimes N_*)$$

pour tout $n \geq 0$, entre le complexe associé au produit cartèsien des modules et le produit tensoriel des deux complexes.

Voici une consequence de ce théorème, et de la Formule de Künneth, valable pour tout complexe de chaînes, qui ensuite nous dit

$$H_n(M_* \otimes N_*) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(M_*) \otimes H_q(N_*).$$

3.4 - Théorème. *Soit A une algèbre associative et unitaire, et soit M un bimodule unitaire sur A. Alors il y a un isomorphism*

$$HY_*(A,M) \cong H_*(A,M)$$

entre l'homologie de digèbre et l'homologie de Hochschild de A.

Le complexe de digèbre de A est le produit du complexe acyclique des arbres et du complexe de Hochschild. De la même façon on montre les résultats suivantes.

3.5 - Théorème (Invariance de Morita). *Soit D une digèbre avec bar-unité, et N une coreprésentation unitaire de D. Pour tout $r \geq 1$, on considère les espaces de matrices $r \times r$ à coefficients dans D et N. Alors il y a un isomorphisme en homologie*

$$HY_*(M_r(D), M_r(N)) \cong HY_*(D,N).$$

3.6 - Théorème (Formule de Künneth pour l'homologie de digèbres). *Soit D une digèbre, avec une correpreésentation N, et soit A une algèbre associative avec un bimodule M. Si toutes les espace sont (bar-)unitaires, il y a un isomorphism en homologie*

$$HY_*(A \otimes D, M \otimes N) \cong H_*(A,M) \otimes HY_*(D,N).$$

4 Relation avec l'homologie de Leibniz

Revenons maintenant à la comparaison entre l'homologie des digèbres et l'homologie des algèbres de Leibniz associée.

4.1 - Homologie des algèbres de Leibniz. [L2] Rappellons que étant donné une algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$, le complexe de chaînes de $\mathfrak{g}$ (à coefficients dans le module triviale k) est donné par le bord $d : \mathfrak{g}^{\otimes n} \longrightarrow \mathfrak{g}^{\otimes n-1}$,

$$d(x_1, ..., x_n) := \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^j (x_1, ..., x_{i-1}, [x_i, x_j], ..., \widehat{x_j}, ..., x_n).$$

L'homologie de ce complexe, $HL_n(\mathfrak{g}) := H_n(CL_*(\mathfrak{g}, k), d)$, est appellée *homologie de Leibniz de* $\mathfrak{g}$.

Pour toute digèbre D, il y a une application canonique $HL_*(D_L) \longrightarrow HY_*(D)$ induite par une projection de l'espace des permutations S_n dans l'espace des arbres Y_n. On a, en plus, un diagramme commutatif avec l'application analogue $H_*(A_L) \longrightarrow H_*(A)$ entre l'homologie de Chevalley-Eilenberg et l'homologie de Hochschild dans le cas où $D = A$ est une algèbre associative.

Regardons maintenant la digèbre des matrices $\mathrm{M}_r(D)$ à coefficients dans une digèbre. Il se pose naturelement le problème de déterminer l'homologie de Leibniz de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{gl}_r(D)$ associée. Rappellons que pour une algèbre associative et unitaire A on a le Théorème de Loday-Quillen-Tsygan [L-Q] [T], qui présente l'homologie cyclique de A comme partie primitive de l'homologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(A) := \lim_{r\to\infty} \mathfrak{gl}_r(A)$: $H_*(\mathfrak{gl}(A)) \cong \bigwedge(HC_{*-1}(A))$. On a aussi le Théorème de Cuvier-Loday [C] [L1], qui détermine l'homologie de Hochschild de A comme partie primitive (dans un sens généralisé) de l'homologie de Leibniz de $\mathfrak{gl}(A)$: $HL_*(\mathfrak{gl}(A)) \cong T(HH_{*-1}(A))$.

4.2 - Théorème. [F1] *Etant donné une digèbre D munie de bar-unité, il y a un isomorphisme*

$$HL_*(\mathfrak{gl}(D)) \cong T(HHS_{*-1}(D))$$

qui calcule la partie primitive de l'homologie de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{gl}(D)$ en termes de l'homologie $HHS_*(D)$ de la digèbre D. (La notation HH indique, comme toujours, que l'on considère la digèbre comme module des coefficients sur elle même.)

L'homologie $HHS_*(D)$ *n'est pas* l'homologie de digèbre $HHY_*(D)$, mais plutôt une de ses variations, définie à partir des ensembles de permutations.

5 Variation sur l'homologie de digèbre

5.1 - Module pseudo-simplicial des permutations. Pour tout nombre naturel n, on considère l'ensemble S_n des permutations sur n éléments. (On ne regarde pas à la structure de groupe.)

Ainsi que pour les arbres, on peut munir les ensembles de permutations de faces $d_i : S_n \longrightarrow S_{n-1}$, pour $i = 0, ..., n$, qui ôtent le terme $\max(\sigma(i), \sigma(i+1))$ de l'image d'une permutation σ (ensuite il faut ranger de 1 à $n-1$ les nombres qui restent entre $\sigma(1), ..., \sigma(n)$). Les relations (d) sont satisfaites, et donc $(k[S_*], d)$ définit un complexe de chaînes, où $d = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$.

On peut en plus définir les dégénérescences $s_j : S_n \longrightarrow S_{n+1}$. Il suffit d'insérer la valeur $n+1$ dans l'image de la permutation σ, entre les valeurs $\sigma(j)$ et $\sigma(j+1)$. Ces opérateurs satisfont aux relations (ds) mais ne satisfont pas aux relations (s) pour aucunes valeurs de i et j! Dans un certain sens, donc, les ensembles des permutations S_* représentent le modèle minimal de module pseudo-simplicial.

Finalement, on peut définir les extra-dégénérescences si on insère 1, au lieu de $n+1$, dans l'image de la permutation (et évidemment on décale tous les autres nombres). En particulier, l'opérateur $s : S_n \longrightarrow S_{n+1}$ qui place 1 avant $\sigma(1)$, dans l'image de σ, constitue une homotopie entre l'identité et l'application nulle sur le complexe des permutations. Donc le complexe $(k[S_*], d)$, comme J. Lodder avait déjà observé [Lo], est acyclique.

5.2 - Variation de l'homologie de digèbre. Étant donnée une digèbre D et une corepresentation N, on peut définir une variation de l'homologie HY tout simplement si on remplece les ensembles d'arbres Y_n avec les ensembles de permutations S_n. Le nouveau module de n-chaînes sera donc

$$CS_n(D, N) := k[S_n] \otimes N \otimes D^{\otimes n}.$$

Dans la définition du bord d, il faut évidemment remplacer les symboles $\circ_i^y$, dépendent des arbres, avec des symboles $\circ_i^\sigma$ qui dépendent des permutations. Voici la nouvelle regle. Pour $i = 0$: $\circ_0^\sigma$ vaut $\dashv\!\!|$ si $\sigma(1) = 1$, et $|\!\!\vdash$ autrement; pour $i = 1, ..., n-1$: $\circ_i^\sigma$ est $\dashv$ si $\sigma(i) < \sigma(i+1)$, et bien $\vdash$ si $\sigma(i) > \sigma(i+1)$; et finalement, pour $i = n$: $\circ_n^\sigma$ vaut $|\!\!\vdash$ si $\sigma(n) = 1$, et $\dashv\!\!|$ autrement. On note par

$$HS_n(D, N) := H_n(CS_*(D, N), d),$$

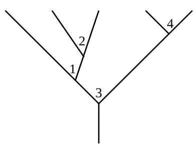
la nouvelle homologie de D à coefficients dans N.

Quand la digèbre D est bar-unitaire, l'homologie HS est aussi associée à un module pseudo-simplicial, comme la HY. De ce point de vue il n'y a pas de differences entre les deux théories, et pour l'homologie HS on peut répéter tous les résultats qu'on a cité pour l'homologie des digèbres HY. En particulier, on peut étendre un résultat bien connu pour l'homologie d'une algèbre associative à coefficients dans elle même (voir [C], [L1] et plus récemment [Lo]): si A est une algèbre associative et unitaire, alors il y a un isomorphisme $HS_*(A, M) \cong H_*(A, M)$ entre l'homologie HS et l'homologie de Hochschild de A à coefficients dans un quelconque bimodule unitaire M.

La relation entre l'homologie HY et l'homologie HS est donnée par les arbres à niveaux.

5.3 - Arbres à niveaux. On note avec $\tilde{Y}_n$ l'ensemble d'arbres planaires, binaires, avec une racine et n sommets intérieurs placé, cette fois-ci, chaqun à son niveau de hauteur à partir de la racine. Par exemple, les arbres et sont à niveaux, tandis que non.

On choisi la règle suivante pour numéroter les sommets intérieurs. Chaque sommet ferme un chemin qui descend du trou entre deux feuilles adjacentes et est délimité par des côtés de l'arbre. On numéròte un sommet avec i si le trou associée est placé entre les feuilles $i-1$ et i. Par exemple:



Un n-arbre à niveau peut être identifiée avec la permutation qui associe à chaque sommet numéroté son niveau. Par exemple l'arbre ci dessu correspond à la permutation σ qui a comme imàge l'ensemble ordronné $(2, 3, 1, 4)$. De telle façon on a établi une correspondence bijective entre l'ensemble S_n de permutations sur n éléments et l'ensemble $\tilde{Y}_n$ de n-arbres à niveaux. La composition de cette bijection avec la projection naturelle $\tilde{Y}_n \longrightarrow Y_n$ qui oublie les niveaux, induit une application sur l'homologie

$$HS_n(D, N) \longrightarrow HY_n(D, N),$$

qui est un isomorphisme pour $n = 0, 1, 2$.

On se pose alors la question si les théories HY et HS coincident toujours. Voici un contra-exemple.

5.4 - Homologie des digèbres abelienne. Une digèbre est appellée *abelienne* si tous les produits sont nuls. Regardons une digèbre abelienne D, et l'homologie à coefficients dans le module trivial k. Puisque, évidemment, toutes les faces sont nulles, dans les deux complexes de chaînes $CY_*(D)$ et $CS_*(D)$ on a que toutes les chaînes sont cycles, et il n'y a pas de bords. On a donc:

$$HY_n(D) \cong k[Y_n] \otimes D^{\otimes n} \qquad \text{e} \qquad HS_n(D) \cong k[S_n] \otimes D^{\otimes n},$$

pour tout $n \geq 0$.

6 Suite spectrale pour l'homologie de digèbre

Une différence entre l'homologie HY et sa variation HS est dans les proprietés combinatoires des arbres.

6.1 - Bicomplexe d'arbres orientée. [F4] L'orientation des feuilles des arbres nous permet de définire un bicomplexe placé dans le premier quadrant. On note par $Y_{p,q}$ l'ensemble d'arbres qui ont p feuilles orientée comme \ (sauf la première) et q feuilles orientée comme / (sauf la dernière). Puisque chaque face d_i ôtet une feuille orienté dans l'une des deux façons, on peut toujours etabilire si elle agit comme application horizontale $Y_{p,q} \longrightarrow Y_{p-1,q}$, où comme application verticale $Y_{p,q} \longrightarrow Y_{p,q-1}$. On définit un bicomplexe $k[Y_{p,q}]$ avec bords d^h et d^v, dont le complexe totale coincide avec l'originale complexe d'arbres, $\mathrm{Tot}_n(k[Y_{*,*}]) = k[Y_{n+1}]$.

6.2 - Suite spectrale pour l'homologie de digèbre. Cette construction se étendet à l'homologie d'une digèbre D, sans ipothèses restrictives sur D et sur sa coreprésentation N. On obtien un bicomplexe avec chaînes $CY_{p,q}(D,N) := k[Y_{p,q}] \otimes N \otimes D^{\otimes p+q+1}$, qui a comme totale le complexe naturel de digèbre: $\mathrm{Tot}_n(CY_{*,*}(D,N)) = CY_{n+1}(D,N)$. Par consequence, on a une suite spectrale

$$E^2_{pq} := H_p H_q(CY_{*,*}(D,N)) \Longrightarrow HY_{p+q+1}(D,N)$$

qui converge à l'homologie de la digèbre, en dimension positive.

La construction du bicomplexe orienté peut être etendu aux arbres à niveaux, et donc aussi à l'homologie HS des digèbres. On obtien une suite spectrale analogue, qui converge à $HS_n(D,N)$ pour $n > 0$.

La difference entre les deux théories d'homologie apparaît dans le calcul de cette suite spectrale. En particulier, étant donné un p-arbre y, on cosidère son arbre orienté $\tilde{y}$, défini comme le (p, q_y)-arbre obtenu si on bifurque les feuilles de y qui sont orientée comme /. (On decouvre que q_y est le nombre de /-feuilles de y.) Les proprietés combinatoires des arbres nous permettent de décomposer les complexes verticales de l'homologie naturelle en somme directe de complexes:

$$CY_{p,*}(D,N) = \bigoplus_{y \in Y_p} C^{\tilde{y}}_{*-q_y}(D,N),$$

où $C^{\tilde{y}}_{*-q_y}(D,N)$ est un certain complexe vertical construit sur l'arbre $\tilde{y}$, qui à sa fois est le complexe totale d'un multi-complexe avec dimension $d = 2p+1$. (Pour plus de détailles voir [F3] et [F4].) Dans la suite spectrale, donc, on obtien

$$E^1_{pq} := H_q(CY_{p,*}(D,N)) = \bigoplus_{y \in Y_p} H_{q+q_y}(C^{\tilde{y}}_*(D,N), d^v).$$

Pour l'homologie HS, même si les permutations sont en effet des arbres à niveaux, le complexe verticale $CS_{p,*}(D,N)$ ne se decompose pas dans la somme directe des complexes analogues $C^{\tilde{\sigma}}_*(D,N)$.

Une conséquence de la décomposition de E^1_{pq} en somme directe est que on peut étendre le théoreme (3.4) aussi aux algèbres H-unitaires.

6.3 - Théorème. *Si A est une algèbre associative H-unitaire, alors on a un isomorphisme en homologie*

$$HY_*(A,M) \cong H_*(A,M)$$

quelconque soit le bimodule M sur A.

On peut ensuite montrer que pour les algèbres associatives les notions de H-unitarieté relative à l'homologie de Hochschild et à l'homologie de digèbre sont équivalent.

6.4 - Théorème. *Si A est une algèbre associative, alors A est H-unitaire relativement à l'homologie de Hochschild si et seulment si elle le est relativment à l'homologie de digèbre, c'est-à-dire*

$$H_*(A) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad HY_*(A) = 0.$$

References

[C] **Cuvier, C.** *Homologie de Leibniz et Homologie de Hochschild*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.**27** (1994), 1-45.

[F1] **Frabetti, A.** *Leibniz homology of dialgebras of matrices*, Preprint J. Pure Appl. Alg., (1997).

[F2] **Frabetti, A.** *Dialgebra homology of associative algebras*, Preprint Notes au C.R.A.S. Paris, (1997).

[F3] **Frabetti, A.** *(Co)omologia delle dialgebre*, Tesi di Dottorato dell'Università di Bologna, (2/1997).

[F4] **Frabetti, A.** *Homology of disimplicial modules*, In preparation.

[I] **Inasaridze, K. N.** *Homology of pseudo-simplicial groups, nonabelian derived functors and algebraic K-theory*, Math. Sbornik, T. 98 (140), N. 3 (11), (1975), 339-362.

[L1] **Loday, J.-L.** *Cyclic Homology*, Grundlehren der math. Wissenschaften **301**, Springer-Verlag, 1992.

[L2] **Loday, J.-L.** *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz*, Ensegn. Math., **321** (1993), 269-293.

[L3] **Loday, J.-L.** *Algèbres ayant deux opérations associatives (digèbres)*, C. R. Acad. Sci. Paris **321** (1995), 141-146.

[L4] **Loday, J.-L.** *Dialgebras*, In preparation, (1996).

[L-P] **Loday, J.-L. - Pirashvili, T.** *Universal Enveloping Algebras of Leibniz Algebras and (Co)homology*, Math. Annalen **296** (1993), 569-572.

[L-Q] **Loday, J.-L. - Quillen, D.** *Cyclic Homology and the Lie Algebra Homology of Matrices*, Comment. Math. Helv. 59 $(1984), 565-591$.

[Lo] **Lodder, J.** *Leibniz Homology and the James Model*, Math. Nachr. 175 $(1995), 209-229$.

[T] **Tsygan, B. L.** *The homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homologie* (in russian), Uspekhi Mat. Nauk 38 $(1983), 217-218$; Russ. Math. Survey 38 No. 2 $(1983), 198-199$.

Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna,
Piazza di Porta San Donato, 5
40127 Bologna, Italy
e-mail : frabetti@dm.unibo.it